姓名: ________________

学号: ________________

学院: ________________

年级: ________________

上海科技大学
2020–2021 学年第一学期期末考试卷

开课单位：数学科学研究所
授课教师：张正　薛博卿　董俊斌　陈克应
考试科目：数学分析 I
课程代码：GEMA1009

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
计分									
复核									

评卷人签名:　　　　**复核人签名:**

日期:　　　　**日期:**

分数: ________

页码: 1

1.（30 分，每小题 5 分）填空选择题

(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 是基本列（即 Cauchy 列）的 $\varepsilon - N$ 定义:

若 $\forall \varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n>N_0\ \forall p>0$ 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$,

则称 $\{a_n\}$ 为基本列.

(2) 计算函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{3x}\ln(1+3t)\,\mathrm{d}t}{x\sin x}=$ $\frac{27}{2}$.

(3) 设 $f(x)=e^{-\pi x^2}$，则

$f'(x)=-2\pi x e^{-\pi x^2}$

$\Sigma[2\pi x][e^{-\pi x^2}]$

$e^{-\pi x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots$

$1+(-\pi x^2)$

$\frac{(-\pi x^2)^n}{n!}$

$f^{(2n)}(0)=$ $(-\pi)^n\times\frac{(2n)!}{n!}$，$f^{(2n+1)}(0)=$ 0.

(4) 星形线 $\begin{cases} x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长是 $\frac{3}{2}$.

$\sqrt{(6\cos^2 t\sin t)^2}$ $6\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}$

$3\sin 2t$ $-\frac{3}{2}\cos 2t$

(5) 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x=$ $2e^{-1}$.

(6) 判断下列数项级数的敛散性并将正确的选项填写在空格处.

(a) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛. B.

$\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right|$

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散.

(b) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+2020}$ B

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散.

分数: ________

页码: 2

2.（8 分）求不定积分

$$\int \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

解: $\int \frac{2x^2-x+3}{x^3+1}dx = \int \frac{2x^2}{x^3+1}dx + \int \frac{3-x}{x^3+1}dx$

$= \frac{2}{3}\ln(x^3+1) + \int \frac{C}{(x+1)} + \frac{Ax+B}{x^2-x+1}$

原式 $= \int \frac{4}{3}\frac{1}{x+1}dx + \int \frac{\frac{2}{3}(x-1) + \frac{7}{3}}{x^2-x+1}dx$

$= \frac{4}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x^2-x+1| + \frac{7}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1}$

$= \frac{2}{3}\ln|x^3+1| + \frac{4}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x^2-x+1| + \frac{7}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\frac{1}{2}))$

$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + (B+C)x + C.$

$\begin{cases} A+B=2 \\ B+C-A=-1 \\ A+C=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2A-C=3 \\ A+C=3 \end{cases}$ $A=2$, $C=1$, $B=0$

$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$

$2\ln|x+1| + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2-x+\frac{1}{4})+1}$

$= 2\ln|x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(x-\frac{1}{2}).$

$2\ln|x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(x-\frac{1}{2})$

分数: ________

页码: 3

3.（10 分）设

$$f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

又令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 证明：$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $F'(0)=0$.

(提示：先用分部积分公式对 $F(x)$ 进行改写.)

解: $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}dt=\int_0^x t^2 d\cos\frac{1}{t}=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt$

$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}dt}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}-x\cos\frac{1}{x}=0$

同理 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-x\cos\frac{1}{x}=0$

则 $F'_+(0)=F'_-(0)=0$ 故 $F'(0)=0$

分数: ________

页码: 4

4.（10 分） 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上导函数连续，且满足 $|f'(x)| \leq 1$.

(1) 证明: 对任意正整数 n, 任意的正整数 $1 \leq k \leq n$, 和任意 $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$,
成立: $|f(x) - f(\frac{k-1}{n})| \leq |x - \frac{k-1}{n}|$.

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上导函数连续，故 $f(x) \in C[0,1]$ 且在 $[0,1]$ 上可导

因为 $k \in [1,n]$, $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \in [0,1]$

则由Lagrange中值定理得

$\exists\, \xi \in [\frac{k-1}{n}, x]$ st. $\left|\frac{f(x)-f(\frac{k-1}{n})}{x-\frac{k-1}{n}}\right| = |f'(\xi)|$.

又因为 $\forall x \in [0,1]$ $|f'(x)| < 1$.

故 $|f'(\xi)| < 1$ 故 $|f(x) - f(\frac{k-1}{n})| < |x - \frac{k-1}{n}|$

(2) 证明：对任意正整数 n，有 $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k-1}{n})\right| \leq \frac{1}{2n}$.

解: $\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k-1}{n})\right|$

$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx \cdot \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k-1}{n})\right|$

$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k-1}{n})\, dx\right|$

$\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x) - f(\frac{k-1}{n})|\,dx$.

由上题可知 $|f(x) - f(\frac{k-1}{n})| < |x - \frac{k-1}{n}|$ $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$

故 $\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x)-f(\frac{k-1}{n})|\,dx \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |x - \frac{k-1}{n}|\,dx = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{k-1}{n}(x)\right]\Big|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n}$

$x\sum \frac{n}{e^{nx^2}}$

$S(x)=\frac{1}{e^{x^2}}+\frac{2}{e^{2x^2}}+\cdots+\frac{n}{e^{nx^2}}$

$\frac{1}{e^{x^2}}S(x)=\frac{1}{e^{2x^2}}+\cdots+\frac{n}{e^{(n+1)x^2}}$

$(1-\frac{1}{e^{x^2}})S(x)=\frac{\frac{1}{e^{x^2}}}{1-\frac{1}{e^{x^2}}}-\frac{n}{e^{(n+1)x^2}}$

$S(x)=\left[\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}-\frac{n}{e^{(n+1)x^2}}\right]\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$

$x\frac{e^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}-\frac{nxe^{x^2}}{e^{(n+1)x^2}(e^{x^2}-1)}$

$=\frac{x}{e^{x^2}-1}\left[\frac{e^{x^4}}{e^{x^2}-1}-\frac{n}{e^{nx^2}}\right]$

分数: ________

页码: 5

5.（12 分）考虑函数项级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}$，$x\in(0,+\infty)$.

(1) 证明：此级数在 $(0,+\infty)$ 上连续.

$\forall\ [a,b]\subseteq(0,+\infty)$

有 $\left|\frac{nx}{e^{nx^2}}\right|\leq\left|\frac{nb}{e^{na^2}}\right|=b\left|\frac{n}{e^{na^2}}\right|$

令 $f(x)=e^x-\frac{1}{6}x^3$ $f'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$ $f''(x)=e^x-x$

$x>1$时 $f''(x)>0$ $x>1$时 $f'(x)>0$ $x>1$时 $f(x)>0$

故 $x\geq1$时 $f(x)>0$

则 $e^x>\frac{1}{6}x^3$ 则 $e^{na^2}>\frac{1}{6}n^3a^6$

则 $\left|\frac{n}{e^{na^2}}\right|<\left|\frac{6}{n^2a^6}\right|$

又因为 $\frac{n}{e^{na^2}}$与$\frac{6}{n^2a^6}$为正项级数且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2a^6}$收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{na^2}}$收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb}{e^{na^2}}$ 收敛.

故由Weierstrass定理得

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}$一致收敛 $\forall\ [a,b]\subseteq(0,+\infty)$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}$ 在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛 $\frac{nx}{e^{nx^2}}$ 在$(0,+\infty)$上连续

故由性质得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}$ 在$(0,+\infty)$上连续

$x\,\frac{(e^{x^3})^2}{(e^{x^2}-1)^2} - \frac{nx\,e^{x^3}}{e^{(n+1)x^2}(e^{x^3}-1)}$

(2) 证明 $S(x)$ 在 0 点附近无界（因此 $\int_0^1 S(x)\,dx$ 是一个瑕积分）. 判断瑕积分 $\int_0^1 S(x)\,dx$ 是否收敛并说明理由.

(2) 解: 令 $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ 因为 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$

则 $S(\frac{1}{\sqrt{2n}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}}$

$\exists \varepsilon_0 = 1$ $\forall N > 0$ $\exists n = N+1$ $\exists p = N+1$

s.t. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}}\left|\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+p}\right| \geq (N+1)\sqrt{N+2} \times \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}} \geq \varepsilon_0$

故 $S(\frac{1}{\sqrt{2n}})$ 发散，又因为 $x \in (0,+\infty)$ 则 $S(x)$ 为正项级数的和函数

故 $S(\frac{1}{\sqrt{2n}})$ 无界

又因为 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$ 则可说明 $x \to 0$ 时 $S(x)$ 无界

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛 且 $u_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}$ 可积分

故 $\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{nx}{e^{nx^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1$

$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}e^{-n} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}e^{-nx^2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^n}$

因为 $\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (\frac{1}{1-\frac{1}{e}})$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ 发散

故 $\int_0^1 S(x)dx$ 发散

分数: ________

页码: 7

6.（10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

解: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{n^2+2n+2}{n+1}\right|}{\left|\frac{n^2+1}{n}\right|}|x| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3+2n^2+2n}{n^3+n^2+n+1}\right||x| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right||x| = |x|$

则 当 $|x|<1$ 时, 由比值判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$ 绝对收敛.

① $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}$ 发散

② $x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}(-1)^n$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n}(-1)^n\neq 0$ 则 发散

$|x|>1$ 时 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n\neq 0$ 则 极级发散

故 $x\in(-1,1)$ 时级数收敛

且在 $x\in(-1,1)$ 中级数内闭一致收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ $S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$

$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ $\frac{S_1(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ $\int_0^x\frac{S_1(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\frac{x}{1-x}$

则 $\frac{S_1(x)}{x}=\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$S_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$

则 $S_2(x)=S(x)+S_1(x)=-\ln(1-x)+\frac{x}{(1-x)^2}$

分数: ________

7.（10 分）

(1) 考虑数列 $B_n = \frac{\pi}{2} - \arctan n$. 试用 $\varepsilon - N$ 定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}(B_n + \frac{1}{2^2}B_{n-1} + \cdots + \frac{1}{n^2}B_1) = 0.$$

解: 因为 $B_n = \frac{\pi}{2} - \arctan n$. $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ 同理 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 > 0$ $\forall n > N_0$ 有 $|B_n| < \varepsilon$. 且 $|B_n| < M$

对于上述 $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 > 0$ $\forall m > n > N_1$ 有 $|\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}| < \varepsilon$.

则 对上述 $\varepsilon > 0$ $\exists N_2 = (N_1 + N_0) \times 10$ $\forall n > N_2$. 有

$|B_n + \frac{1}{2^2}B_{n-1} + \cdots + \frac{1}{n^2}B_1| \le |B_n + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{[\frac{n}{2}]^2}B_{n+1-[\frac{n}{2}]}| + |\frac{1}{([\frac{n}{2}]+1)^2}B_{n-[\frac{n}{2}]} + \cdots + \frac{1}{n^2}B_1|$.

$\le \varepsilon \times (1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{[\frac{n}{2}]^2}) + M(\frac{1}{[\frac{n}{2}]^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2}) \le (L+M)\varepsilon$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 假设收敛至 L

则原式 $\le \varepsilon \times L + M \times \varepsilon = (L+M)\varepsilon$

则 $\lim_{n\to+\infty} B_n + \cdots + \frac{1}{n^2}B_1 = 0$

(2) 若已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}(\arctan n + \frac{1}{2^2}\arctan(n-1) + \cdots + \frac{1}{n^2}\arctan 1).$$

因为 $B_n = \frac{\pi}{2} - \arctan n$

$\lim_{n\to+\infty}(B_n + \cdots + \frac{1}{n^2}B_1) = 0$

故 $\lim_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{2}) \times (1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}) - (\arctan n + \frac{1}{2^2}\arctan(n-1) + \cdots + \frac{1}{n^2}\arctan 1) = 0$

故 $\lim_{n\to+\infty}(\arctan n + \cdots + \frac{1}{n^2}\arctan 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{12}$

分数: ______

页码: 9

8.（10 分） 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致等度连续，是指：对任意 $\varepsilon > 0$，存在只与 ε 有关的 $\delta > 0$，使得当 $x_1, x_2 \in I$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，对所有 n 都有：

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon.$$

设 $\{f_n(x)\}$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的一致收敛的连续函数列，证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致等度连续.

解：因为在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛

故 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ $\forall m>n>N_0$ $\forall x \in I$ 有 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

又因为在闭区间 $[a,b]$ 上连续，故其在 $[a,b]$ 上一致连续

故对于上述 $\varepsilon>0$ 与 $\forall n>0$ $\exists \delta_n>0$ s.t. $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $|x_1-x_2|<\delta$

有 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$. $\delta_n = f(\varepsilon, n)$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \cdots\cdots \delta_{N_0+1}\}$

则对于上述 $\varepsilon>0$ $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $|x_1-x_2|<\delta$ $\forall n\in[1,N_0+1]$ 有 $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$.

即有 $|f_{(N_0+1)}(x_1)-f_{(N_0+1)}(x_2)|<\varepsilon$

则对于上述 $\varepsilon>0$ 有 $\delta'>0$ $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $|x_1-x_2|<\delta'$ $\forall n>N_0$

有 $|f_n(x_1)-f_{(N_0+1)}(x_1)+f_{(N_0+1)}(x_1)-f_{(N_0+1)}(x_2)+f_{(N_0+1)}(x_2)-f_n(x_2)|$

$= |f_n(x_1)-f_{(N_0+1)}(x_1)| + |f_{(N_0+1)}(x_1)-f_{(N_0+1)}(x_2)| + |f_{(N_0+1)}(x_2)-f_n(x_2)| < 3\varepsilon$