数学分析(I) 部分习题答案

董俊斌　张子宇　编

此文档给出了《数学分析讲义（第一册）》（程艺、陈卿、李平编著）课后习题的计算题答案和一些较难的证明题的提示。其主要目的是针对学生完成作业之后，给出的一个参考和反馈，因此建议任教的老师在每章节的作业完成之后再将相应的作业解答发放给学生。由于编者的时间和水平的局限，错漏之处难免，欢迎联系指正。最后要特别感谢 2021 秋季学期的《数学分析I》的助教们在编写此解答给的帮助。

第一章

§1.1

2. 设 $a<b$, 构造 $c=a+\frac{b-a}{2}\sqrt{2}$, 说明 c 是介于 a,b 之间的有理数。

4. $\frac{1}{4},\frac{125}{333},4\frac{14}{27}$.

7. 两边平方，移项，再进行因式分解即可。

§1.2

8. (1)$\frac{4}{3}$; (2)1; (3)$\frac{1}{3}$; (4)$\frac{1}{2}$; (5)$\frac{1}{1-q}$.

14. 证明：不妨设 $a\geq b$, 分 $a=b$ 以及 $a>b$ 两种情况考虑。情形 $a=b$ 是容易讨论的，而当 $a>b$ 时，则对于充分大的 n, 我们有 $a_n>b_n$.

15. (1) 0. (2) 0. 将 $(n+1)^k-n^k$ 写成 $(n+1)^k-n^k=n^k((1+\frac{1}{n})^k-1)$. 注意到 $0<k<1$, 我们有

$$0<n^k((1+\frac{1}{n})^k-1)<\frac{1}{n^{1-k}}.$$

(3) 2. (4) 1. (5) 1, 根据不等式 $\sqrt[n]{\cos^2 1}\leq\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^n n}\leq\sqrt[n]{n}$ 进行讨论。

16. 记 $a=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, 从而有不等式

$$\sqrt[n]{a^n}\leq\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}\leq\sqrt[n]{na_n^n}.$$

17. (4) 使用 Cauchy 收敛准则。

18. (1) 0. (2) $1-\sqrt{1-c}$. (3) $\sqrt{a}$. (4) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (5) 0. 我们有递推关系 $a_{n+1}=\sin a_n$, 再利用：当 $x\in[0,+\infty]$ 时，有 $\sin x\leq x$.

21. 将条件中的不等式看成 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leq\frac{a_n}{b_n}$, 故数列$\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 递减且为正数列，从而必然收敛。而 $a_n=\frac{a_n}{b_n}\cdot b_n$, 从而 $\{a_n\}$ 收敛的。

22. (1)e, (2)$\frac{1}{e}$, (3)$\frac{1}{e}$, (4)e^2.

26. 关于 $\dfrac{0}{0}$ 的 Stolz 定理，我们只考虑 A 是一个固定的数，对于 $\pm\infty$, 结果是类似的。根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$ 知，对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时，有

$$A-\epsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\epsilon.$$

由于 $\{b_n\}$ 递减，我们知道有

$$(A-\epsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(A+\epsilon)(b_n-b_{n+1}).$$

从而对于任意的正整数 p, 我们有

$$(A-\epsilon)(b_n-b_{n+p})<a_n-a_{n+p}<(A+\epsilon)(b_n-b_{n+p})$$

令 $p\to\infty$, 我们可知 $(A-\epsilon)b_n<a_n<(A+\epsilon)b_n$. 由于 $\{b_n\}$ 严格递减趋于 0, 我们有 $b_n>0$, 从而 $A-\epsilon<\dfrac{a_n}{b_n}<A+\epsilon$. 因此我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$.

§1.3

2. (1) -1; (2)n; (3)$\dfrac{2}{3}$; (4)$\dfrac{3^{70}8^{20}}{5^{90}}$.

6. 当 $x=0$, 极限是 1. 当 $x\neq 0$ 时，分子分母同乘以 $\sin\dfrac{x}{2^n}$, 进行变形即可，结果是$\dfrac{\sin x}{x}$.

7. 方法一：利用等式，当 $x\neq 0$ 时，

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

方法二：利用不等式：$y(1-\frac{y^2}{2})<y\cos y<\sin y<y$, 其中 $y\in(0,\frac{\pi}{2})$.

9. (1)$\frac{2}{5}$; (2)4; (3)0; (4)e^2.

10. (1)1; (2)0; (3)4; (4) $+\infty$.

14. (1) 垂直渐近线 $x=-\frac{1}{e}$, 斜渐近线 $y=x+\frac{1}{e}$. (2) 垂直渐近线 $x=1$, 斜渐近线 $y=3x+1$.

18. (1)$\frac{m}{n}$; (2)a; (3)$\frac{1}{n}$; (4)$\frac{\sqrt{2}}{8}$; (5)$\frac{1}{4}$; (6)1.

§第一章综合习题

1. (1) 0; (2) 0, 注意到 $\{a_n\}$ 从某一项开始递减。(3) 1. (4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,分偶数项和奇数项进行考虑。

3. (2) 利用不等式 $e^{1/n}>(1+\frac{1}{n})$ 即得。

6. 首先，我们有 $a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha=a_n^\alpha(\frac{a_{n+1}^\alpha}{a_n^\alpha}-1)\leq a_n^\alpha(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^{1-\alpha}}$, 因此，无论$\{a_n\}$ 收敛，还是发散到$+\infty$, 都可得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha)=0$.

8. 根据定义直接证明是不难的，亦可以用算术几何平均不等式，结合Stolz定理，但是需要注意的是$a=0$的情况单独讨论。部分同学使用了函数 $\ln x$的连续性，然后直接使用Stolz定理，但是从学习的过程上讲，我们目前并没有这些性质可用。

9. 直接用第 8 题的结论即可。

10. (1) 1; (2) e, 用第 9 题的结论。

11. 第 11 题可以看成第 12 题的应用。

12. 记 $\beta_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$, 则可以直接用Stolz 定理，而当 $\{\beta_n\}$ 收敛时，用Cauchy 收敛准则即可。

13. 做变换 $y = \frac{1}{x}$, 我们有

$$(1+\frac{1}{x^p})^x = (1+\frac{1}{y})^{y^{\frac{1}{p}}} = ((1+\frac{1}{y})^y)^{y^{\frac{1}{p}-1}}.$$

将此函数记为 $f(y)$, 结合 $2 < (1+\frac{1}{y})^y < 3$, 我们对 $f(y)$ 分析即可。

15. 论述的方式和定理1.32 是类似的。

16. 要证集合 S 的稠密性，这可归结到对于任意的 $p \in \mathbb{N}$, 存在 m, n 使得 $m + n\xi$ 在 $[0, \frac{1}{p}]$ 中。对于 $x \in \mathbb{R}$, 记 $[x]$ 是 x 向下取整的部分，而 $\{x\} = x - [x]$ 代表小数部分。我们考虑$\{k\xi\}$, 这里的 $k = 1, 2, \ldots, p, p+1$, 根据抽屉原理，知道必然有k_1, k_2, 使得

$$\frac{q}{p} < \{k_1\xi\} < \{k_2\xi\} < \frac{q+1}{p}$$

对某个 q ($q = 0, 1, 2, \ldots, p-1$) 成立。于是此时，

$$\{k_2\xi\} - \{k_1\xi\} = ([k_1\xi] - [k_2\xi]) + (k_2 - k_1)\xi \in [0, \frac{1}{p}].$$

第二章

§2.1

4. (1)根据定义. (2) 观察到

$$M(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}\quad \text{以及}\quad m(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

再使用(1)中结论即可。

15. 记 $c=f(1)$, 先证明对于任意的有理数 x, 我们有$f(x)=cx$. 利用有理数的稠密性和函数的连续性，推导出 $f(x)=cx$.

17. (1) $\frac{1}{4}$; (2) 1; (3) $\frac{1}{40}$; (4) 2; (5) $\frac{1}{8}$, 使用等价无穷小 $1-\cos t\sim\frac{t^2}{2}(t\to 0)$ 即得$\dfrac{1}{8}$. (6) -50; (7) 使用和差化积公式，有

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

等式右侧的极限是容易计算的，为 0. (8) $\sqrt{2}$.

§2.2

6. 考虑函数 $g(x)=f(x+a)-f(x), x\in[0,a]$, 于是 $g(0)g(a)<0$.

7. 设 M 是最大值, m 是最小值。则不难看出

$$m\leq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\ldots q_nf(x_n)\leq M.$$

12. 记 $m=\inf\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$ 以及 $M=\sup\{f(x)\mid x\in(a,b)\}$, 证明 $f(I)=(m,M)$ 即可。

13. 结合一致连续的定义，使用函数极限存在的Cauchy收敛准则。

16. 考虑函数 $\sin x^2$.

§第二章综合习题

2. 注意到 $f(0)+f(1)=1$, 即容易证明。

4. 证明：首先注意到 $|f(x)|$ 的值有下界，记为 m. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$. 因此可以找到一个区间 $[-X,X]$, 使得当 $x\notin[-X,X]$ 时，$|f(x)|>2m$. 对于 $[-X,X]$, 用连续函数的最值性即可。

5. 考虑 $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$. 则有

$$g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(1-\frac{1}{n})=0.$$

7. 首先函数 $f(x)$ 的值域是有界的，分别记 M, m 为其上界，下界。设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. 如果 $M = m$, 则函数为常值，否则若 $M > l$, 则最大值取到，否则 $m < l$, 可说明最小值可以取到。

8. (1) 先证连续性，于是 x_0 的存在性的证明是容易的（类似于§2.2 的第(4)题），唯一性根据条件 $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ 得到。(2) 由 $|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \le k|x_n - x_0|$ 可得。(3) 考虑 $\sqrt{x^2+1}$.

9. 注意到 $\{x_n\}$ 单调递减，且有下界，故收敛。利用等比数列的求和，不难得到其极限是 $\frac{1}{2}$.

10. 证明 $f(b)$ 是最大值，而 $f(a)$ 不是最大值。

第三章

§3.1

1. (1) 否；(2) 否；(3) 否；(4) 否；(5) 否；(6) 是.

2. (1) $(a,b)=(2,-1)$; (2) $(a,b)=(1,0)$.

6. (1) $\dfrac{15x^2+48x+82}{(5x+8)^2}$; (2)$-\dfrac{1}{\sin^2(x)}+\sin(x)+\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$;

(3) $\dfrac{x+2x\ln(x)}{\ln(3)}$; (4) $\dfrac{(1-\cos(x))-x\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$

(5) $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$; (6) $\dfrac{\left(x^2-x(x-1)^2\ln(x)+1\right)\cos(x)+\sin(x)+x\left(x+(x+1)^2\ln(x)\right)\sin(x)}{x(\sin(x)+\cos(x))^2}$;

(7) $-18x^5+5x^4-12x^3+12x^2-2x+3$; (8) $3x^2\tan x\ln x+x^3\frac{1}{\cos^2 x}\ln x+x^2\tan x$

7. (1) $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; (2)$\dfrac{2\ln(x)}{3x\left(1+\ln^2(x)\right)^{2/3}}$; (3) $-\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+\frac{1}{2}}}$;

(4) $3(\cos(x)-\sin(x))(\sin(x)+\cos(x))^2$; (5) $9x^2\sin^2\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)$;

(6)$\dfrac{\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}+1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; (7) $\cos(x)\cos(\sin(x))\cos(\sin(\sin(x)))$;

(8)$-\dfrac{15\tan^{-1}(x)^2\sin\left(\tan^{-1}(x)^3\right)\cos^4\left(\tan^{-1}(x)^3\right)\cos\left(\cos^5\left(\tan^{-1}(x)^3\right)\right)}{x^2+1}$;

(9) $\dfrac{x^2\left(-x^4+4x+3\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$; (10)$\dfrac{\left(x^3+x\right)\cos(x)+\left(2x^2+1\right)\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}$;

(11) $\dfrac{e^{\sqrt{x^2+1}}x}{\sqrt{x^2+1}}$; (12)$\dfrac{2\ln(x)}{3x\left(1+\ln^2(x)\right)^{2/3}}$;

(13)$x^{2^x}\left(\dfrac{2^x}{x}+2^x\ln(2)\ln(x)\right)+x^x(\ln(x)+1)+x^{x^x}\left(x^{x-1}+x^x\ln(x)(\ln(x)+1)\right)$;

(14)$\dfrac{e^x\ln^{e^x-1}(x)(x\ln(x)\ln(\ln(x))+1)}{x}$; (15) $-\csc^2(x)(\ln(\tan(x))-1)\tan^{\cot(x)}(x)$;

(16)$10^x\sin^{\cos(x)}(x)(-\sin(x)\ln(\sin(x))+\cos(x)\cot(x)+\ln(10))$;

(17)$\dfrac{(x+5)^2}{3(x-4)^{2/3}(x+2)^5\sqrt{x+4}}-\dfrac{5\sqrt[3]{x-4}(x+5)^2}{(x+2)^6\sqrt{x+4}}-\dfrac{\sqrt[3]{x-4}(x+5)^2}{2(x+2)^5(x+4)^{3/2}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x-4}(x+5)}{(x+2)^5\sqrt{x+4}}$;

(18)$\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{(x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right)x^2}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+x+1}}(1-x)}+\dfrac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+x+1}}x^2}{(1-x)^2}+\dfrac{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+x+1}}x}{1-x}$.

8. $f'(x^2)=3x^4, (f(x^2))'=6x^5$.

9. $f'(g(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}$, $(f(g(x)))'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}$.

10. (1) $3x^2f'(x^3)$; (2) $\sin 2x(f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x))$; (3) $(e^x+ex^{e-1})f'(e^x+x^e)$;

(4) $\cos(f(\sin f(x)))\cdot f'(\sin f(x))\cdot\cos f(x)\cdot f'(x)$;

(5) $f'(f(f(\sin x+\cos x)))\cdot f'(f(\sin x+\cos x))\cdot f'(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)$

(6) $(f'(e^x)e^x+f'(x)f(e^x))e^{f(x)}$.

11. (1) 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{xe^{1/x}(e^{1/x}+1)-e^{1/x}}{x(e^{1/x}+1)^2}$, 在 $x=0$ 处，导数不存在。(2) 当 $x>1/2$ 时，$f'(x)=2\sin x+(2x-1)\cos x$, 当 $x<1/2$ 时，$f'(x)=-2\sin x+(1-2x)\cos x$, 在$x=1/2$ 处，导数不存在。

14. (1) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{(x+1)e^x}$; (2) $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{1}{\sin^2 y}$; (3) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2e^{-2x-2x^{-x}(1+\ln x)}}$; (4) $\dfrac{dx}{dy}=\sqrt{1+e^{-2x}}$.

17. (1) 当 $x=1$时，$P_n(x)=\frac{n(n+1)}{2}$, 当 $x\neq 1$ 时，$P_n(x)=\dfrac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$.

(2) 当$x=1$ 时，$Q_n(x)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

当$x\neq 1$ 时，$Q_n(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}(n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1)$.

(3) $R_n(x)=\dfrac{-1/2+n\sin(n+1/2)\sin 1/2+1/2\cos n}{2(\sin 1/2)^2}$.

18. (1)$(4x^2-2)e^{-x^2}$; (2) $2^{x+1}+x2^{x+2}\ln 2+x^2 2^x(\ln 2)^2$; (3) $2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$; (4) 当 $x>0$ 时，$y''=2$, 当 $x<0$时，$y''=-2$, 当 $x=0$ 时，二阶导数不存在。

19. (1) $y''=2f'(x^2)+4x^2\cdot f''(x^2),\quad y'''=12x\cdot f''(x^2)+8x^3\cdot f'''(x^2)$

(2) $y''=e^xf'+(e^x+1)^2f'',\quad y'''=e^xf'+3e^x(e^x+1)f''+(e^x+1)^3f'''$.

21.(1) $(x^2e^x)^{(n)}=e^x(x^2+2nx+n(n-1))$;

(2)$((x^2+1)\sin x)^{(n)}=(x^2+1)\sin(x+\frac{n\pi}{2})+2nx\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})+n(n-1)\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})$;

(3) $(\frac{1}{x^2-3x+1})^{(n)}=\frac{1}{(-1)^n n!}(\frac{1}{(x-2)^n}-\frac{1}{(x-1)^n})$;

(4) $(\sin x\cdot\cos x)^{(n)}=2^{n-1}\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$.

22. $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}$

24. $x'=\dfrac{ah^2}{\pi r^2x^2}$.

25. 速度是 $\frac{16}{25}$ cm/min.

§3.2

2. (1) $y'=\frac{1}{x-2\pi}$; (2) $y'=x\sin x$; (3) $y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(4) $y'=\frac{2}{x^2-1}$; (5)$y'=\frac{\log 5\times 5^{\sqrt{\arctan x^2}}}{(1+x^4)\sqrt{\arctan x^2}}$; (6) $y'=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)$;

(7) $y'=e^{-x}(\sin(3-x)-\cos(3-x))$; (8) $y'=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

3. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$; (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{1-\cos t^3}$;

(3)$\frac{dy}{dx}=\frac{\phi\cos\phi+\sin\phi}{\cos\phi-\phi\sin\phi}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\phi^2+2}{(\cos\phi-\phi\sin\phi)^3}$; (4)$\frac{dy}{dx}=-\tan\phi$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3}\csc\phi\sec^4\phi$.

4. (1) $x+y-\sqrt{2}=0$; (2) $4x+3y-12=0$.

§3.3

4. (3) 考虑函数$f(x)=x\ln x$, 分别在区间$[a,\dfrac{a+b}{2}]$ 以及$[\dfrac{a+b}{2},b]$ 上用中值定理。

7. 不妨设 $x_1 < x_2$. 当 $x_2 - x_1 \le \frac{1}{2}$, 直接用中值定理。当$x_2 - x_1 > \frac{1}{2}$ 时，在 $[0, x_1]$ 以及 $[x_2, 1]$ 上分别用中值定理。

8. 考虑 $g(x) = e^{-x} f(x)$, 证明其导数为 0.

10. (1)直接用中值定理。(2) 利用$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c)$, 其中$\xi \in (c, x)$.

12. 证明 $f(x)$ 的导数是 0.

15. 证明$\frac{f(x)}{x}$ 的导数大于零。

17. 考虑 $g(x) = e^x(f'(x) - f(x))$.

18. (1)单调增区间：$(-\infty, 0), (0, +\infty)$; 单调减区间：$(0, 1)$. 极大值点 $x = 0$ 且 $y(0) = 0$, 极小值点 $x = 1$ 且 $y(1) = -1$.

(2)单调增区间：$(0, +\infty)$; 单调减区间：$(-\infty, 0)$. 极小值点 $x = 0$ 且 $y(0) = 0$.

(3)单调增区间：$(-\infty, -1), (0, 1)$; 单调减区间：$(-1, 0), (1, +\infty)$. 极大值点 $x = -1$ 且 $y(-1) = e^{-1}$, 极大值点 $x = 1$ 且 $y(1) = e^{-1}$, 极小值点 $x = 0$ 且 $y(0) = 0$.

(4)单调增区间：$(0, e)$; 单调减区间：$(e, +\infty)$. 极大值点 $x = e$ 且 $y(e) = e^{1/e}$.

(5)单调增区间：$(1, e^2)$; 单调减区间：$(0, 1), (e^2, +\infty)$. 极大值点 $x = 1$ 且 $y(1) = 0$, 极小值点 $x = e^2$ 且 $y(e^2) = \frac{4}{e^2}$.

(6)单调增区间：$(-\infty, 1)$; 单调减区间：$(1, +\infty)$. 极大值点 $x = 1$ 且 $y(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

19. (1) 最大值: $y(-2) = y(2) = 13$, 最小值：$y(-1) = y(1) = 4$.

(2) 最大值: $y(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, 最小值：$y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$.

(3) 最大值: $y(0) = \frac{\pi}{4}$, 最小值：$y(1) = 0$.

(4) 最小值：$y(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

21. (1) 一个实零点，范围在$(4.49, 4.50)$.

(2) 若$0 < a < 1/e$, 则有两个零点，分别在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$; 若$a = 1/e$, 则零点恰为e; 若 $a > 1/e$, 则没有零点。

22. 证明数列 $\{b_n\}$ 单调递增且有上界（需要用导数判断相关函数的单调性和极值）。

§3.4

4. 对函数 $\frac{f(x)}{x}$ 和函数 $\frac{1}{x}$ 用 Cauchy 中值定理。

5. (1) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$; (2) $\frac{mn(n-m)}{2}$; (3) -4; (4) $-\frac{1}{6}$; (5) 1; (6) α; (7) 0; (8) $\frac{1}{a}$; (9) 0; (10) 0; (11) 2/3; (12) 0; (13) 1; (14) $e^{-\frac{1}{2}}$ (15) -2; (16) 2; (17) 1; (18) 4/3; (19) 0; (20) 0.

6. (1) 数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界 0. (2) 将 nx_n 看成 $\frac{n}{\frac{1}{x_n}}$, 用 Stolze 定理以及L'Hospital法则。

§3.5

4. 使用定理3.27关于凸函数的等价命题进行讨论。

5. 结合题中条件，根据导函数不存在第一类间断点，可以得到 $f'(x)$ 的连续性，然后使用§3.3的第13题的结论即可。

8. (1) 凸区间为$(\frac{1}{2},+\infty)$ ，凹区间为$(-\infty,\frac{1}{2})$, 拐点为 $x=\frac{1}{2}$.

(2) 凸区间为$(0,+\infty)$，凹区间为$(-\infty,0)$，拐点为$x=0$.

(3) 凸区间为$(0,+\infty)$, 凹区间为$(-\infty,0)$, 拐点为$x=0$.

(4) 凸区间为$(-\infty,-3),(-1,+\infty)$, 凹区间为$(-3,-1)$, 拐点为$x=-3$和$x=-1$.

(5) 凸区间为$(-\infty,+\infty)$, 无拐点。

(6) 凸区间为$((2k-1)\pi,2k\pi),k\in\mathbb{Z}$，凹区间为$(2k\pi,(2k+1)\pi),k\in\mathbb{Z}$，拐点为$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

9. $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$.

12. (1) $\kappa(1)=-\frac{1}{6}$; (2) $\kappa(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{\pi}$.

14. 假设 f 不是常数，必然有两点 x_1,x_2 取值不相等，对其用定理3.27中斜率的不等式，我们不难得到 f 是无界的，矛盾。

§3.6

1.(1) $y=-1-3x-3x^2-4x^3-4x^4\cdots-4x^n+o\left(x^n\right)$；

(2)$\sin^2\left(x\right)=\frac{2x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{m-1}\,\frac{2^{2m-1}x^{2m}}{(2m)!}+o\left(x^{2m}\right)$.

2. $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)$.

3. $\ln\left(1+\left(1-\cos\left(x\right)\right)\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o\left(x^6\right)$.

4. $f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$

5. (1)$\tan x=x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1+2\sin^2(\theta x)}{\cos^4(\theta x)}x^3$, $(0<\theta<1)$

(2) $\frac{1}{x}=-1-(x+1)-\cdots-(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{(-1+\theta(x+1))^{n+2}}$, $(0<\theta<1)$

6. (1)$-\frac{1}{12}$; (2)$\frac{1}{2}$; (3)$\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{6}$.

8. 由 Taylor 展开，我们有

$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\quad f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2$

两式相减，再利用题中所给条件放缩即可。

11. 由Taylor 展开，我们知道当 $x\to x_0$ 时，

$f(x)=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)=(x-x_0)^n(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1))$. 利用此等式分析即可。

§第三章综合习题

3. 考虑函数$f(x)=\dfrac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\dfrac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx$, 结合$f(0)=f(1)=0$, 用中值定理即可。

4. 考虑辅助函数 $g(x)=e^xf(x)$.

5. 可以用反向数学归纳法证明 $f(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$. 此时可以说明当 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 时且 $0<\lambda<1$ 时，有$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$, 最后利用函数的连续性即可。

6. 考虑辅助函数 $g(x)=(x-1)^2 f'(x)$.

8. 记 m 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值。分下面三种情况考虑：(1) $m>0$, 则考虑函数 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$; (2) $m=0$, 记 $f(\xi)=0$, 则 $f'(\xi)=0$; (3) $m<0$, 且设 $f(x_0)=m$, 存在包含 x_0 的一个区间$[a,b]$, 使得 $f(a)=f(b)=0$ 且 $f(x)<0, \forall x \in (a,b)$, 在区间$(a,b)$ 上，考虑函数 $h(x)=x+\frac{1}{f(x)}$.

12. 题目中应该假定 f 在 0 处是连续的。要证明的不等式等价于 $f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)$, 用中值定理即可。

15. 首先取对数，求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$ 的极限即可，而 $\ln(1+\dfrac{k}{n^2})=\dfrac{k}{n^2}+o(\dfrac{k}{n^2})=\dfrac{k}{n^2}+o(\dfrac{1}{n})$. 于是$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})=1/2$, 原来的极限就是 $\sqrt{e}$.

16. 记 $f(x)=x^{1/x}$, 考虑 $f(x)$ 的单调性和最值。

17. 记 $f(x)=x\cos x$, 考虑 $f(x)$ 的性质。

18. 由Taylor 展开，存在ξ_1,ξ_2 满足下列两个等式

$f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2).$

两者相减，由题中条件知$f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$. 由$f'''(x)$的连续性，知道存在$\xi$, 使得$f'''(\xi)=3$.

19. 假设结论不对，那么必然存在 $M>0$, 当 $x \ge M$ 时，$f'(x) \ge f(ax) > 0$. 于是 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 上是递增的。对于 $x>M$, 我们有 $f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x>f(a\xi)(a-1)x>f(ax)(a-1)x$. 于是不难看出，当 $x>\max\{M,\frac{1}{a-1}\}$ 时，$f(x)<0$, 矛盾。

20. 首先用$f(x)=\ln x$ 的凹性证明如下不等式 $xy \le \dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}y^q$, 其中 $x,y>0$. 接下来，对 $x=\dfrac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}}$ 以及 $y=\dfrac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}$ 用上述不等式就可以得到我们要证明的不等式。

第四章

§4.1

1. (1)$\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}+C$; (2)$x-e^x+\frac{e^{2x}}{2}+C$; (3)$\frac{4^x}{\log(4)}+\frac{2^{x+1}\times 3^x}{\log(6)}+\frac{9^x}{\log(9)}+C$;
(4) $\tan(x)-x+C$; (5)$x-\arctan(x)+C$; (6)$\frac{1}{2}(x+\tan(x))+C$.

2. (1) $-\frac{1}{202}(1-2x)^{101}+C$; (2) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C$; (3) $\log(\sin(x)+\cos(x)+1)+C$;
(4)$\frac{1}{2}(\arctan(x))^2+C$; (5)$-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C$; (6)$2\arctan(\sqrt{x})+C$; (7)$-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)^2+C$;
(8) $\log(x\log(x)+1)+C$; (9)$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))+C$; (10)$\frac{\sin^6(x)}{6}+C$.

3. (1) $2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{e^x-2}}{2}+C$; (2)$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$;
(3) $\frac{-x}{a^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}+C$; (4) $\frac{1}{2}(a^2\arctan\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-x\sqrt{a^2-x^2})+C$;
(5) $2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$; (6)$-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+C$
(7) $\frac{x}{x-\ln x}+C$; (8)$\frac{-\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$; (9) $\frac{3}{40}(2x+1)^{2/3}(4x+17)+C$;
(10) $\frac{17}{5}(6x^{5/14}+3\ln(x^{5/7}-x^{5/14}+1)-2\sqrt{3}\arctan(\frac{2x^{5/14}-1}{\sqrt{3}}))+C$;
(11) $\arctan(\sqrt{x^2-1})-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$; (12) $-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$.

4. (1) $\int|x|\,dx=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+C & x\le 0\\ \frac{x^2}{2}+C & x>0\end{cases}$

(2) $\int\max\{1,x^2\}dx=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}+C & x<-1\\ x+C & -1\le x\le 1\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}+C & x>1\end{cases}$

5. (1) $-x\cos x+\sin x+C$; (2) $\frac{1}{3}x^2\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$; (3) $\frac{1}{3}x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$;
(4) $\frac{1}{5}x^2\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x+\frac{2}{125}\sin 5x+C$; (5) $\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{3}\ln|\sec x+\tan x|+C$;
(6) $(x^2-2x+2)e^x+C$; (7) $\frac{1}{4}(2x^2+3)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$;
(8) $\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$;
(9) $x(\arcsin x)^2+3\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;
(10) $x\ln(x-\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C$.

6. (1) $I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; (2) $I_n=x^ne^x-nI_{n-1}$.

7. (1) $x-\log(1+e^x)+C$; (2) $\frac{1}{2}(\log(1-x+x^2)-\log(1+x+x^2))+C$;
(3) $-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan(x)+C$; (4) $\frac{2}{15}(-2+x)^{\frac{3}{2}}(4+3x)+C$;
(5) $2\sqrt{-1+x}\arctan(\sqrt{-1+x})-\arctan^2(\sqrt{-1+x})-\log(x)+C$;
(6) $2\sqrt{e^x-2}(x-2)+4\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}})+C$; (7) $\frac{1}{2}e^x(\cos(x)-x\cos(x)+x\sin(x))+C$;
(8) $-\cot(x)-\log(\sin(x))+\log(\cos(x)+\sin(x))+C$; (9) $(-2-\sqrt{x})\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}+C$;
(10) $2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{x+1}{x}+C$;
(11) $-\frac{1}{4}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{32}\arctan x+\frac{1}{16}\sin(2\arctan x)+\frac{1}{128}\sin(4\arctan x)+C$;
(12) $-x\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+2\ln(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}))+C$; (13) $x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}$;
(14) $x\tan\frac{x}{2}+C$; (15) $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$;
(16) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$; (17) $-\frac{\arctan x}{x}+\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$;
(18) $-\frac{\arctan e^x}{e^x}-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$; (19) $e^{2x}\tan x+C$;
(20) $-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$; (21) $\sin 2x-\frac{2}{3}(\sin 2x)^3+\frac{\sin 4x}{4}+x+C$;
(22) $\frac{1}{3}((x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2})$; (23) $\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{4}+\ln\sqrt{\sqrt{x}+1}+C$;
(24) $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$; (25) $e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\sin x}+C$; (26) $\frac{e^x}{1+x}+C$.

§4.2

1. (1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$; (2) $\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$; (3) $x+\ln|\frac{x-1}{x}|+C$;
(4) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\arctan x+C$; (5) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{x+1}+C$;
(6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)+C$;
(7) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right|+C$; (8) $-\frac{1}{8}\left(\frac{x^8}{x^8+1}-\ln\left(x^8+1\right)\right)+C$.

2. (1) $\frac{1}{2\cos x+2}+\frac{1}{2}\ln(\sin\frac{x}{2})-\frac{1}{2}\ln(\cos\frac{x}{2})+C$; (2) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+\cos^2 x-\ln\left(\cos x\right)+C$;
(3) $\tan x-\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}-\frac{5}{3}\cot\left(x\right)+C$; (4) $-\frac{1}{4}\sin\left(2x\right)-\frac{1}{8}\cos\left(2x\right)+\frac{1}{4}\ln\left(\sin x+\cos x\right)+C$;
(5) $\frac{1}{2}\arctan\left(\sin^2 x\right)+C$; (6) $x-\frac{\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)}{\sqrt{2}}+C$;
(7) $\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x-\sqrt{2}\,\mathrm{arctan\,h}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\right)+C$; (8) $\frac{\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x}{\sin^3 x\cos^3 x}+C$;
(9) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x+1}+\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)-\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right)+C$; (10) $\frac{a\ln\left(a\sin x+b\cos x\right)+bx}{a^2+b^2}+C$.

第五章

§5.1

6. (2) 设 $f(x)=x^m(1-x)^n$, 证明函数 $f(x)\le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ 即可。

11. (1) $2x\sin x^4$; (2) $-\frac{1}{1+x^2+\cos^2 x}$; (3) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$;
(4) $\cos(\int_0^x \sin(\int_0^y \sin t^2 dt)dy)\sin(\int_0^x \sin t^2 dt)$.

12. (1) 1; (2) e.

14. 证明 $G'(x)\ge 0$ 即可。

15. (1) 2; (2) $\frac{1}{\alpha+1}$; (3) $2\ln 2-1$; (4) $\frac{\ln 4-\ln 3}{5}$.

17. (1) 1/3; (2) 4/3.

18. (1) 1/4; (2) 1/3; (3) $\pi/2$; (4) $\dfrac{1}{p+1}$.

19. (1) 0; (2) 0; (3) 0.

22. (1) 4; (2) 0; (3) 0; (4) 2/3; (5) $-\frac{1}{8}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$; (6) $\frac{\pi}{8}$; (7) $6-2e$;
(8) $\frac{\pi}{4}$; (9)$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-2\ln(\sqrt{2}+1)$; (10) $\frac{\pi}{2ab}$; (11) $\frac{\pi}{16}$; (12) $\frac{5\pi}{8}$; (13) $\frac{(e-1)\pi}{2}$; (14) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

24. 对于 $t\in[0,1]$, 用不等式 $t-\frac{t^3}{6}<\sin t<t$ 即可。

26(2). 利用分部积分，我们有

$$I=\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{-e^{-x}}{x+100}\Big|_0^{100}-\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{(x+100)^2}dx$$

上述等式中最右边的第一项可以直接计算，第二项我们继续采用分部积分

$$\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{(x+100)^2}dx=\frac{-e^{-x}}{(x+100)^2}\Big|_0^{100}-2\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{(x+100)^3}dx.$$

此时，我们有

$$2\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{(x+100)^3}dx\le 2\int_0^{100}\frac{1}{(x+100)^3}dx\frac{-1}{(x+100)^2}\Big|_0^{100}=0.75*10^{-4}.$$

因此，我们只需要计算 $\dfrac{-e^{-x}}{x+100}\Big|_0^{100}-\dfrac{-e^{-x}}{(x+100)^2}\Big|_0^{100}$ 大致就能达到要求的精度，如果不够，再一次分部积分，一定可以达到的。

27. (2) 将积分$\int_0^1 f(x)dx$ 按照点α 分拆成两部分之和，再进行适当变形即可。

§5.2

4. 考虑区间上$[x_i,x_{i+1}]$的振幅, 有$\omega_i(\dfrac{1}{f})\le\dfrac{1}{c^2}\omega_i(f)$, 然后采用例5.2.5 的类似讨论。

§5.3

1. (1) $\frac{1}{2}\ln(2a+\sqrt{1+4a^2})+a\sqrt{1+4a^2}$; (2) $6a$; (3) $a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

2. (1) a^2; (2) 3π; (3) $e+\frac{1}{e}-2$.

3. (1) 绕 x 轴：$\frac{\pi^2}{2}$, 绕 y 轴: $2\pi^2$; (2)$\pi(e-1)$; (3) $5\pi^2$.

5. (1) $4\pi r^2$; (2) $4\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b})$;

(3) $\pi a\sinh a\sqrt{1+a^2\sinh^2 a}+\pi\ln(a\sinh a+\sqrt{1+a^2\sinh^2 a})$; (4) $\frac{32\pi a^2}{5}$.

6. $\dfrac{4\pi g r^4}{3}$.

7. $\frac{Gm^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$.

§5.4

1. (1) 收敛，$\frac{1}{2}$; (2) 发散； (3) 发散； (4) 发散； (5) 收敛，$\frac{1}{2}$；

(6) 收敛, π；(7) 收敛，-1; (8) 收敛，$\frac{\pi}{2}$; (9) 收敛，$-\ln 2$;

(10) 收敛，$2-2\ln 2$; (11) 收敛，$n!$; (12) 收敛，$(-1)^n n!$.

2. (1) Cauchy主值是0; (2) Cauchy主值发散。

4. (1) 发散； (2) 收敛，为 0.

§第五章综合习题

1. 用三角函数的和差化积的公式直接简单计算即可。

2. (1) 换元 $u=1-x$ 计算即可。(2) 通过分部积分，递归考虑。

3. (1) 分析计算知道原函数是 $xe^{x+\frac{1}{x}}$, 结果是$\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$; (2) 将积分区间分成若干形如 $[k\pi,(k+1)\pi]$ 的区间进行计算,结果是 n^2；(3) 简单观察知道，题中等式可以写成$f(x)=2\pi+\frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)dt$, 两边在$[0,1]$ 上积分，得到$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2\pi}{1-\ln 2}$.

4. 首先换元$u=\tan x$, 再利用不等式$\frac{u^n}{2}\le\frac{u^n}{1+u^2}\le\frac{u^{n+1}}{2}$.

5, 8, 9 按照书中的提示即可，6和7是容易的。

10. 证明：当 $x\neq 0$ 时，通过换元，易知函数是可导的。而当$x\neq 0$ 时，根据导数的定义，由洛必达法则，求得 $F'(0)=\frac{1}{2}f'(0)$.

11. (1) $F(x)$ 在除了± 1的地方都是可导的。(2) 做变换$u=\frac{1}{t}$ 之后，利用分部积分，可以算出 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}du$, 由此不难得到$|f(x)|\le x^2+2\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{u^3}du=2x^2$.

14. 对于 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$, 我们知道$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\le\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt\le\frac{1}{n\pi}\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$, 再利用三明治定理即可。

15. 注意到$\sin^{m+1}x\le\sin^m x,\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 因此只要证明$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=0$. 而$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$. 我们取对数，有$\ln\dfrac{(2n-1)!!}{2n!!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1-\dfrac{1}{2k})\le\sum\limits_{k=1}^{n}(-\dfrac{1}{2k})$. 从而得到要求的极限是 0.

16. 首先$(\int_a^b f^n(x)dx)^{\frac{1}{n}}\le(b-a)^{\frac{1}{n}}M$, 另一方面，我们知道$\forall\epsilon>0$, 存在一个子区间$I$, 使得$\forall x\in I$, 有$|f(x)|\ge M-\epsilon$. 从而有$(\int_a^b f^n(x)dx)^{\frac{1}{n}}\ge(M-\epsilon)|I|^{\frac{1}{n}}$.

19. 记 $f(x_1)=m$ 为最小值，$f(x_2)=M$ 为最大值。从而$|f(a)|-\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(a)-|f(x)|dx\le M-m=\int_{x_1}^{x_2}f'(x)dx\le\int_0^1|f'(x)|dx$.

20. 利用不等式 $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$.

21. 首先$|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\frac{k}{n})|dx$, 再利用中值定理进行放缩即可。

22. 假设结论不正确，于是存在一点 x_0, 使得 $|f'(x_0)|\ge\sqrt{2f(x_0)}$. 首先考虑 $f'(x_0)\le-\sqrt{2f(x_0)}$, 此时 $\forall x>x_0$, 有 $f'(x)\le-\sqrt{2f(x_0)}+(x-x_0)$. 从而$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)dt\le\frac{1}{2}(x-x_0-\sqrt{2f(x_0)})^2$. 于是$f(x_0+\sqrt{2f(x_0)})\le 0$, 得到矛盾。类似地，可以考虑 $f'(x_0)\ge\sqrt{2f(x_0)}$ 的情况。

第七章

§7.1

2. (1) 发散；(2)收敛；(3) 发散；(4) 发散；(5) 收敛；(6) 发散；(7) 收敛；(8) 收敛；

(9) 发散；(10) 收敛；(11) 收敛；(12) 收敛；(13) 收敛；(14) 收敛的充要条件是 $k > 1$;

(15) 收敛；(16) 收敛的充要条件是$0 < a < 1$.

4. (3) 利用$a_{n+1} = n(a_n - a_{n+1}) + ((n+1)a_{n+1} - na_n)$即可。

6. 考虑 $c_n = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_n$, 于是 c_n 递减，证明 c_n 收敛，从而 a_n 收敛。

8. (1) 0; (2) 0.

9. 收敛的。由 Leibniz 判别法知道，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. 于是题中的级数收敛。

12. (1) 绝对收敛；(2) 绝对收敛；(3) 条件收敛；(4) 条件收敛；(5) 条件收敛；

(6) 当$p > 1$, 绝对收敛，当$0 < p \leq 1$, 条件收敛；(7) 条件收敛；

(8) 绝对收敛；(9)绝对收敛；(10) 当$p > \frac{1}{2}$, 绝对收敛，当$0 < p \leq \frac{1}{2}$, 条件收敛.

14. 由题意知道，$\dfrac{|a_{n+1}|}{b_{n+1}} < \dfrac{|a_n|}{b_n}$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{b_n}$ 存在，再由比较定理的极限形式即可。

15. (1) 收敛 (Dirichlet判别法)；(2) 收敛 (Dirichlet判别法); (3) 收敛 (Dirichlet和Abel 判别法);

(4) 收敛 (Dirichlet和Abel 判别法).

§7.2

2. 解：(1) $(0, +\infty)$; (2) $[-1, 1)$; (3) $[0, +\infty)$; (4) $|x| > \frac{1}{2}$;

(5) $(0, 6)$; (6) $(-e, e)$; (7) $(0, +\infty)$; (8) $(-1, 1)$.

4. 解：(1) 一致收敛； (2) 一致收敛； (3)不一致收敛； (4) 一致收敛, $x^2 e^{-nx} \leq \frac{4e^{-2}}{n^2}$；

(5) 一致收敛(Dirichlet 判别法)； (6) 不一致收敛, 结合Cauchy收敛准则用反证法即可。；

(7) 一致收敛; (8) 当 $x_0 = \frac{2}{n+\ln n}$ 时，$\dfrac{x_0^2}{(ne^n)^{x_0}}$ 取最大值。故原级数是一致收敛的。

5. Abel 判别法。

6. 只要说明对于任意的自然数 k, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-\ln x)^k}{n^x}$ 是内闭一致收敛的。

7. 直接使用定理7.36 即可。

8. 考虑 $h(x) = f(1/x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\pi x}{(x+2)^n}$, 由 Weiestrass判别法容易知道 $h(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛的，于是可以根据$h(x)$ 的连续性知道两个极限分别是 1 和 $-\frac{1}{4}$.

9. 在279页，我们已经知道 $f(x)$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上是一致收敛的, 因此我们可以逐项积分，得到要求的积分值为1/2.

10. 思路：解方程 $f' = f^2$ 且 $f(0) = 1$, 我们可以知道 $f = \dfrac{1}{1-x}$. 因此猜想$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
正式的解：首先有 $f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t)dt}$. 简单计算，$f_1 = 1, f_2 = e^x$, 所以通过归纳法易证 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. 另外，我们同样归纳可知，$f_n(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$. 从而对于任意的 $x \in [0, 1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ 存

在。对于固定的 n, 考虑 $g(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$, 从而 $g'(x)=f_n(x)(f_{n+1}(x)-f_n(x))>0$, 因此 $g(x)$ 递增，据此，我们可以证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,\delta)$ 上是一致收敛的, $\forall\, 0<\delta<1$. 因此可以在原题的等式中取极限，从而得到 $f'=f^2$, 解得 $f=\dfrac{1}{1-x}$.

11. 证明：(1) 反证法，假设 f_n 不一致收敛到 0, 于是存在 $\varepsilon>0$, 对于任意的 n, 都存在 x_n 使得 $f_n(x_n)>\varepsilon$. 注意到 $\{x_n\}$ 必然有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x_0, 再根据连续性，我们有 $f_n(x_0)\geq\varepsilon$, 矛盾。(2) 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和是 $S_n(x)$, 对 $S(x)-S_n(x)$ 使用(1)的结论即可。

§7.3

1. (1) 1; (2) 4; (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\max\{a,b\}$; (5) $+\infty$; (6)$\frac{1}{3}$; (7) 1; (8) 1.

3. (1) $\arctan x, x\in[-1,1]$; (2) $\dfrac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$; (3) $\dfrac{2}{(1-x)^3}, x\in(-1,1)$;

(4) $\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, x\in[-1,1]$;

(5) 不难发现$S'(x)=1+xS(x)$, 解此微分方程，有$S(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$.

4. (1) 考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$, 值为 $\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\ln 2$. (2) 考虑级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$, 值为 $\dfrac{22}{27}$.

(3) 考虑级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$, 值为 $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(4) 考虑级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}x^n$，值为 $5e$.

5. (1) $-3+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e}{n!}(\dfrac{x-a}{a})^n,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-1)^n}{n},\ \ x\in(0,2]$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n,\ \ x\in(-6,-2)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-(-2)^n-1}{n}x^n,\ \ x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$; (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}}{\sqrt{2}n!}(x-\dfrac{\pi}{4})^n,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$.

6. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ \ x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \ x\in[-1,1]$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \ x\in(-1,1)$; (4) $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{(n-1)n},\ \ x\in[-1,1]$.

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1},\ \ x\in(-\infty,+\infty)$; (6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ \ x\in(-\infty,+\infty)$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n)!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \ x\in(-\infty,+\infty)$;

§7.4

1. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}$; (2)$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{2n+1}$.

4. (1) 1; (2) e.

5. (1) 发散，用第六题的结论即可；(2) 当 $n>\frac{3}{2}$ 时，收敛，当 $n\leq\frac{3}{2}$ 时，发散。

6. 使用Stolz定理即可。

第七章综合题

1. 裂项可以前后相消的，最后得到结果为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (此值为$\frac{\pi^2}{6}$).

2. 求部分和，直接裂项比较。

3. 当 a_n 有界时，利用不等式 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\leq\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$, 我们可以知道级数收敛。反之，利用不等式 $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}-1$, 可以证明出 a_n 有界。

4. 当 a_n 有界时，利用上一题的方法进行放缩是容易的。现在设 a_n 无界，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 当 $\alpha\geq 1$, 则我们知道 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}\leq\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$, 于是级数收敛。最后我们考虑 $\alpha<1$, 此时我们将级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})\frac{1}{(\frac{1}{a_n})^{1-\alpha}}\leq\int_0^{\frac{1}{a_1}}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\mathrm{d}x$$

最右端的瑕积分是收敛的，因此，级数收敛。

5. 首先，$a_{n+1}\leq(1+c_n)a_n\leq e^{c_n}a_n$. 从而，$a_{n+1}\leq e^{\sum_{k=1}^{n}c_k}a_1$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 是收敛的，从而 a_n 是有界的。于是不难说明 $\sum_{n=1}^{\infty}c_na_n$ 是收敛的，再根据 $a_{n+1}\leq a_n+c_na_n$, 我们就知道 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$ (7.1节习题6). 如果 $a>0$, 则我们知道当 n 充分大时，有 $a_n>\frac{a}{2}$. 于是

$$b_n\Phi(\frac{a}{2})\leq b_n\Phi(a_n)\leq a_n-a_{n+1}+c_na_n.$$

但这与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散是矛盾的。最终，我们得到了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

6. 首先，由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$(1+2+\cdots+n)^2\leq(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n})$$

稍作变形，我们得到

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq 4\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{a_j}.$$

两边求和，计算得到发现 M 可以取 2.

7. 用第6题的结论即可。

8. (1) 直接用 Cauchy收敛准则即可。(2) 显然的一个例子是 $a_n=\frac{1}{n}$.

9. 不难看出 $f_n(x)=x^{1-\frac{1}{2^n}}$, 首先它逐点收敛到 $f(x)=x$. 考虑$\beta_n=\sup\{f_n(x)-f(x)\mid x\in[0,1]\}$, 容易说明 $f_n(x)$ 一致收敛。

10. 和7.2的第10题一样。

11. 记 m 和 M 分别是 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最小值和最大值，简单计算，不难发现 $m\frac{x^n}{n!} \le f_n(x) \le M\frac{x^n}{n!}$, 记 $K = \max\{|m|, |M|\}$, 从而$|f_n(x)| \le K\frac{a^n}{n!}$, 故 $f_n(x)$ 一致收敛于 0.

12. 对 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 在 $x = 1$ 处展开。