第六章，第七章复习自测题

1 不定项选择, Multiple Choices. 15 points

1-1 (5 points). Determine which of the following statements is/are true.

- (A) If $A \in M_{n\times n}$ is an orthogonal matrix, and $\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue of A, then $\lambda = 1$ or $\lambda = -1$.

  正确。 如果$\lambda \in \mathbb{R}$是A的一个特征值，那么存在非零向量$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$使得$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$。又因为$A$为正交矩阵，由讲义Theorem 7.4可知，$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$成立。综上可得，

  $$\|\boldsymbol{v}\| = \|A\boldsymbol{v}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{v}\|.$$

  因为$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$，以上等式成立必然要求$|\lambda| = 1$，即$\lambda = 1$或者$-1$。

- (B) Let $A, B \in M_{n\times n}$. Then AB is invertible if and only if A and B are invertible.

  正确。 如果A, B可逆，那么显然AB可逆。反之，假设AB可逆，那么我们有$\text{rank}(AB) = n$；同时由第9次作业Problem E，我们知道$n = \text{rank}(AB) = \text{rank}(T_A \circ T_B) \leq \min(\text{rank}(A) = \text{rank}(T_A), \text{rank}(B) = \text{rank}(T_B)) \leq n$，因此必然有$n = \min(\text{rank}(A) = \text{rank}(T_A), \text{rank}(B) = \text{rank}(T_B))$，即$\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$，显然这意味着$A$和$B$都可逆。

- (C) Every orthogonal matrix $A \in M_{n\times n}$ is diagonalizable.

  错误。 矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$显然是正交矩阵，但是它的特征多项式为$\lambda^2 + 1$，不存在实数的特征值，因此$A$不能对角化。

- (D) If $A \in M_{n\times n}$ has n linearly independent eigenvectors, then A is a symmetric matrix.

  错误。 上三角矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$拥有两个不同的特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，因此它可以对角化(讲义Theorem 6.15)，故而存在A的两个特征向量组成$\mathbb{R}^2$的一组基底，见讲义Theorem 6.13。但显然A不是对称矩阵。

1-2 (5 points). Determine which of the following functions $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is/are inner product.

- (A) $V=\mathbb{R}^2$, for $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$, $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y}$, where $A=\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}$.

  不是内积。注意$A=\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}$的两个特征值为3与$-3$。假设$\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$是$A$关于$-3$的一个特征向量，那么因为$A\boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{v}$，我们有

  $$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^\top(-3\boldsymbol{v})=-3\|\boldsymbol{v}\|^2<0,$$

  不满足内积的正定性(内积的必要条件之一是$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geq 0$对一切$\boldsymbol{x}\in V$成立)。

- (B) $V=\mathbb{R}^2$, for $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$, $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y}$, where $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

  不是内积。 由于$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}=0$对任何$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$都成立，因此不满足内积的正定性(内积的必要条件之一是$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\iff\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0$)。

- (C) $V=M_{n\times n}$, for $A,B\in V$, $\langle A,B\rangle=\text{tr}(B^\top A)$.

  是内积。容易证明。

- (D) $V=P_2=\{a_0+a_1+a_2x^2;a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$, for $p(x),q(x)\in V$, $\langle p(x),q(x)\rangle=p(1)q(1)+p(2)q(2)+p(3)q(3)$.

  是内积。$\langle p(x),q(x)\rangle=p(1)q(1)+p(2)q(2)+p(3)q(3)$的对称性，可加性，齐次性，以及$\langle p(x),p(x)\rangle\geq 0$对任何$p(x)\in P_2$都成立的条件都容易验证。因此只需证明$\langle p(x),p(x)\rangle=p(1)^2+p(2)^2+p(3)^2=0\iff p(x)=\mathbf{0}\in P_2$。显然，如果$\langle p(x),p(x)\rangle=p(1)^2+p(2)^2+p(3)^2=0$，那么必然有$p(1)=p(2)=p(3)=0$。然而，$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$作为一个二次方程，如果它不恒等于0的话，那么最多只可能有两个不同的实数根，因此$p(1)=p(2)=p(3)=0$(即$p(x)=0$有三个不同的实数根)告诉我们$p(x)$必然恒等于0，即$p(x)=\mathbf{0}\in P_2$。

1-3 (5 points). Determine which of the following properties is/are similar invariants.

- (A) rank.
- (B) The dimension of eigenspace.
- (C) Eigenvector.
- (D) Characteristic polynomial.

答案： **ABD**。 **C**不总是成立，反例见讲义**169**页。

2 填空题, Fill in the blanks. 15 points

2-1 (5 points). Let $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, then the singular values of A are ____.

答案： $A^\top A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. 因此$A^\top A$的特征方程为$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$，故得到$A^\top A$的特征值为$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$。因此$A$的奇异值为$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{6}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$。(这里注意，在奇异值的排列中需要遵循从大到小的排列)。

2-2 (5 points). If the quadratic form $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ is changed to standard form $f = 6y_1^2$ by the orthogonal change of variables $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, then $a =$ ____.

答案： 由$f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$容易看出$f(x_1, x_2, x_3)$所对应的二次型$Q_A$中出现的对称矩阵$A$为

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

已知$f(x_1, x_2, x_3)$通过 orthogonal change of variables $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 可简化为$f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2$，那么这意味着$A$与对角矩阵$D = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$相似，也即6与0是$A$的两个特征值，且0的代数重数为2。由此可得，$A$的特征多项式可以表示为$p_A(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 0)^2$。又由于

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - a)^3 - 12(\lambda - a) - 16,$$

令$(\lambda - a)^3 - 12(\lambda - a) - 16 = (\lambda - 6)(\lambda - 0)^2$并对比$\lambda^2$的系数，可求得$a = 2$。

2-3 (5 points).

Let $A \in M_{3\times3}$ be a diagonalizable matrix: there are diagonal matrix D and invertible matrix P such that $D = P^{-1}AP$. Suppose that $\mathrm{tr}(A) = -5$, and $A^2 + 2A - 3I_3 = \mathbf{0}_{3\times3}$

is the zero matrix. Then $D =$ ______.

答案： 令$D = \begin{bmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{bmatrix}$。由于tr是相似不变量且已知$A$与$D$相似，因此 $\mathrm{tr}(D) = x + y + z = \mathrm{tr}(A) = -5$。另一方面，将$D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1}$代入$A^2 + 2A - 3I_3 = \mathbf{0}_{3\times 3}$，可得

$$P(D^2 + 2D - 3I_3)P^{-1} = \mathbf{0}_{3\times 3},$$

那么因此P为可逆矩阵，我们得到$D^2 + 2D + 3I_3 = \mathbf{0}_{3\times 3}$，即

$$\begin{bmatrix} x^2+2x-3 & & \\ & y^2+2y-3 & \\ & & z^2+2z-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

从而有$x^2+2x-3 = y^2+2y-3 = z^2+2z-3 = 0$。解该方程可得$x, y, z$可以取$-3$或者$1$。那么联合等式$x + y + z = -5$可得$x = -3, y = -3, z = 1$为可能的一组解。因此$D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$。(这里可采用任意排列顺序，比如$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$也是正确答案)。

3 10 points

Suppose that $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$, and A is similar to B.

(a) (4 points) Find a and b.

答案： 由于A与B相似，且det与tr都是相似不变量，我们有

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + 4 + a = \mathrm{tr}(B) = 2 + 2 + b \Rightarrow 5 + a = 4 + b,$$

$$\det(A) = 6a - 6 = \det(B) = 4b.$$

求解以上方程组，可得$a = 5, b = 6$。

(b) (6 points) Find an invertible matrix P such that $B = P^{-1}AP$.

答案： 由题目要求可知，这里需要将A对角化为$B = P^{-1}AP$，且由B的具体形状可知，P的第一列与第二列，记为$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$，是$A$关于特征值2的特征空间的一组基底，$P$的第三列，记为$\boldsymbol{c}_3$，是$A$关于特征值6的特征空间的一组基底。因此分别求解方程组

$$(2I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

与

$$(6I_3 - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

可得$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。

4 10 points

Consider P_2 with the inner product

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

for $p(x), q(x) \in P_2$. Apply the Gram-Schmidt process to transform the standard basis $B = \{1, x, x^2\}$ to an orthonormal basis of P_2.

答案：见英文教材372–373页的Example 9。

5 10 points

Consider the following quadratic form

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + kx_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) (3 points) Find the symmetric matrix A such that $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}$, where $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

答案： 令$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$为所求对称矩阵($a_{ij} = a_{ji}$)，那么

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 4} a_{ij}x_ix_i,$$

与$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + kx_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2$比较后得到

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) (4 points) If 3 is an eigenvalue of A, find the value for k and find an orthogonal matrix P such that $D = P^{-1}AP$ where D is a diagonal matrix.

答案： 首先注意到A的特征多项式$p_A(\lambda)$为

$$\det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-k & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda-k & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)[(\lambda-k)(\lambda-2)-1].$$

已知3是A的一个特征值，因此必然有$p_A(3) = 0$，即

$$(3-1^2)[(3-k)\times 1 - 1] = 0,$$

从而得到$k = 2$。此时有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

以及A的特征多项式为$p_A(\lambda) = (\lambda^2-1)[(\lambda-2)^2-1] = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-3)$。
因此A的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1. \lambda_3 = 3$。
求解方程组$\lambda_1 I_4 - A = \mathbf{0}$，可得$\lambda_1 = 1$的特征空间$V_{\lambda_1}$的一组基底为

$$\boldsymbol{v}_1^{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2^{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

对$\{\boldsymbol{v}_1^{\lambda_1}, \boldsymbol{v}_2^{\lambda_1}\}$使用Gram–Schmidt算法，可以得到$V_{\lambda_1}$的一组标准正交基底为

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{v}_1^{\lambda_1}/\|\boldsymbol{v}_1^{\lambda_1}\| = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2^{\lambda_1} - (\boldsymbol{v}_2^{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{q}_1)\boldsymbol{q}_1}{\|\boldsymbol{v}_2^{\lambda_1} - (\boldsymbol{v}_2^{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{q}_1)\boldsymbol{q}_1\|} = \boldsymbol{v}_2^{\lambda_1}/\|\boldsymbol{v}_2^{\lambda_1}\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(注意，$\boldsymbol{v}_2^{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{q}_1 = 0$)。

求解方程组$\lambda_2 I_4 - A = \boldsymbol{0}$，可得$\lambda_2 = -1$的特征空间$V_{\lambda_2}$的一组基底为

$$\boldsymbol{v}_1^{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

因此利用Gram–Schmidt算法，可得V_{λ_2}的一组标准正交基底为

$$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{v}_1^{\lambda_2}/\|\boldsymbol{v}_1^{\lambda_2}\| = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

最后，求解方程组$\lambda_3 I_4 - A = \boldsymbol{0}$，可得$\lambda_3 = 3$的特征空间$V_{\lambda_3}$的一组基底为

$$\boldsymbol{v}_1^{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

因此利用Gram–Schmidt算法，可得V_{λ_3}的一组标准正交基底为

$$\boldsymbol{q}_4 = \boldsymbol{v}_1^{\lambda_3}/\|\boldsymbol{v}_1^{\lambda_3}\| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

综上可得，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$为所

求正交矩阵。

(c) (3 points) Decide whether A is positive definite.
由**讲义Theorem 7.19**可知，对称矩阵A为positive definite当且仅当它所有的特征值均为正数。我们已知题目里的A有特征值-1，因此A并非positive definite。

6 10 points

Let $A \in M_{n\times n}$ be a matrix such that $\|A\boldsymbol{x}\| = 1$ for all unit vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (i.e., $\|\boldsymbol{x}\| = 1$), where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm on $\mathbb{R}^n$. Denote the column vectors of A by $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, i.e.,

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \ldots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}.$$

Compute $\|A^{2023}(\boldsymbol{c}_1 + \ldots + \boldsymbol{c}_n)\|$.

答案： 首先由题目假设可知矩阵A是一个正交矩阵，因为对任何$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$，都有

$$\|A\boldsymbol{y}\| = \underbrace{\|A\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}\|}_{=1}\|\boldsymbol{y}\| = 1 \times \|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\|.$$

利用讲义Theorem 7.5(2)，即正交矩阵的乘积还是正交矩阵，可得A^{2023}为正交矩阵。因此利用正交矩阵保持向量长度不变的性质(讲义Theorem 7.4)，可得

$$\|A^{2023}(\boldsymbol{c}_1 + \ldots + \boldsymbol{c}_n)\| = \|\boldsymbol{c}_1 + \ldots + \boldsymbol{c}_n\|.$$

因为$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$是正交矩阵$A$的列向量，它们必然组成$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基底(讲义Theorem 7.4)，因此由勾股定理(讲义Theorem 7.12(7))可得$\|\boldsymbol{c}_1 + \ldots + \boldsymbol{c}_n\|^2 = \|\boldsymbol{c}_1\|^2 + \ldots + \|\boldsymbol{c}_n\|^2 = n$，因此

$$\|A^{2023}(\boldsymbol{c}_1 + \ldots + \boldsymbol{c}_n)\| = \|\boldsymbol{c}_1 + \ldots + \boldsymbol{c}_n\| = \sqrt{n}.$$

7 15 points

Let V be a finite dimensional inner product space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Let U, W be two subspaces of V.

(a) (5 points) Suppose that $U \subset W$, prove that $W^{\perp} \subset U^{\perp}$.

答案： 显然，对任何$\boldsymbol{v} \in W^{\perp}$，满足$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$对任何$\boldsymbol{w} \in W$成立。特别地，因为$U \subset W$，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$对任何$\boldsymbol{u} \in U$成立，即$\boldsymbol{v} \in U^{\perp}$。因此$W^{\perp} \subset U^{\perp}$。

(b) (5 points) Suppose that $\text{proj}_U = \text{proj}_U \circ \text{proj}_W$, prove that $U \subset W$.

答案： 对任何$\boldsymbol{v} \in W^{\perp}$，显然有$\text{proj}_W(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$，那么利用假设可知

$$\text{proj}_U(\boldsymbol{v}) = \text{proj}_U \circ \text{proj}_W(\boldsymbol{v}) = \text{proj}_U(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

这显然告诉我们$\boldsymbol{v} \in U^{\perp}$(见讲义Theorem 7.15)。因此我们得到$W^{\perp} \subset U^{\perp}$。由第一问可知$(U^{\perp})^{\perp} \subset (W^{\perp})^{\perp} \Rightarrow U \subset W$。

(c) (5 points) Suppose that $U \subset W$, prove that $\text{proj}_U = \text{proj}_W \circ \text{proj}_U$.

答案： 由正交分解定理(讲义Theorem 7.15)，对任何$\boldsymbol{v} \in V$，都有

$$\boldsymbol{v} = \text{proj}_U(\boldsymbol{v}) + \text{proj}_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})$$

且由假设可知$\text{proj}_U(\boldsymbol{v}) \in U \subset W$，因此$\text{proj}_W(\text{proj}_U(\boldsymbol{v})) = \text{proj}_U(\boldsymbol{v})$。

8 15 points

Let $A \in M_{n \times n}$. Suppose that ρ is the largest eigenvalue of $A^{\top}A$.

(a) (3 points) Prove that $\|A\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{\rho}\|\boldsymbol{x}\|$ for all $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm on $\mathbb{R}^n$.

答案： 首先注意，对于任何$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = A\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^{\top}(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\top}(A^{\top}A)\boldsymbol{x}$。
另一方面，由于$A^{\top}A$是对称矩阵，由讲义Theorem 7.9可知存在A的n个**特征向量**$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$组成$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基底，因此(见讲义Theorem 7.15)$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$可以表示为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n.$$

不妨假设$\boldsymbol{v}_i$是$A^{\top}A$关于特征值λ_i的特征向量($i = 1, \ldots, n$)，那么由$(A^{\top}A)\boldsymbol{v}_i =$

$\lambda_i \boldsymbol{v}_i$可得

$$(A^\top A)\boldsymbol{x} = (A^\top A)((\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)(A^\top A)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)(A^\top A)\boldsymbol{v}_n$$
$$= \lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n,$$

将其代入等式$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^\top(A^\top A)\boldsymbol{x}$可得

$$\begin{aligned}
\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^\top(A^\top A)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^\top(\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n) \\
&= \boldsymbol{x}\cdot(\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n) \\
&= ((\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n)\cdot(\lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n) \\
&\underbrace{=}_{\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}\text{ 是标准正交基底}} \lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2 + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)^2.
\end{aligned}$$

由讲义Theorem 7.24可知$A^\top A$的特征值均为非负，因此$\lambda_i \geq 0$对任何$i = 1,\ldots,n$成立；又由假设可知ρ是$A^\top A$最大的特征值，即$\rho \geq \lambda_i \geq 0$对任何$i = 1,\ldots,n$成立，因此，利用以上等式

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \lambda_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2 + \ldots + \lambda_n(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)^2$$

我们得到

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 \leq \rho((\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2 + \ldots + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)^2).$$

又因为$\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2 + \ldots + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}_n)^2$(请利用$\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$的标准正交性质验证)，我们实际得到$\|A\boldsymbol{x}\|^2 \leq \rho\|\boldsymbol{x}\|^2$，即所求的$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{\rho}\|\boldsymbol{x}\|$。

(b) (5 points) Prove that if $\rho < 1$, then $I_n - A$ is invertible.

答案： 要证明$I_n - A$可逆，我们只要证明Null$(I_n - A) = \{\boldsymbol{0}\}$即可。那么假设$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$使得

$$(I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

那么必然需要保证$\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$。又由第一问所得到的结果我们知道，$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{\rho}\|\boldsymbol{x}\|$，因此，若$\boldsymbol{x} \in$ Null$(I_n - A)$，则需要有

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|A\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{\rho}\|\boldsymbol{x}\| \Rightarrow (1 - \sqrt{\rho})\|\boldsymbol{x}\| \leq 0.$$

此时利用假设$\rho < 1$可知，$1 - \sqrt{\rho} > 0$，因此，若要$(1 - \sqrt{\rho})\|\boldsymbol{x}\| \leq 0$成立，只能有$\|\boldsymbol{x}\| = 0$，即$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。所以我们证明了$\boldsymbol{x} \in$ Null$(I_n - A) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，证毕。

(c) (7 points) Suppose that A is invertible. Prove that A can be written as $A = RH$, where $R \in M_{n\times n}$ is orthogonal, $H \in M_{n\times n}$ is symmetric and all of H's eigenvalues are positive.

思路： 这一问要求将矩阵A分解为$A = RH$，R是正交矩阵，H是对称矩阵。那么这个分解要么是QR分解，要么是SVD分解。如果是QR分解的话，即$A = Q\tilde{R}$，那么$\tilde{R}$需要是一个上三角矩阵，而题目中要求$A = RH$中出现在右边的矩阵H是一个对称矩阵，由于作为上三角矩阵的$\tilde{R}$一般来说不具有对称性质，故QR分解并不适合题意。因此我们需要尝试的是利用SVD分解。

答案： 以上解题思路告诉我们，现在需要考虑的是A的SVD分解。那么假设A的SVD为

$$A = U\Sigma V^\top,$$

$U, V \in M_{n\times n}$是正交矩阵，$\Sigma \in M_{n\times n}$的对角线上是A的正奇异值

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \geq \ldots \geq \sigma_k = \sqrt{\lambda_k} > 0.$$

由于已经假设A为可逆矩阵，即$\text{rank}(A) = n$，因此由SVD分解的具体内容，见讲义Theorem 7.26，我们知道$k = n$，即$\Sigma \in M_{n\times n}$的对角线上的元素$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$全为正数。

接下来我们需要从SVD分解$A = U\Sigma V^\top$中制造出一个对称矩阵H和一个正交矩阵R使得

$$A = U\Sigma V^\top = RH.$$

这里我们只需注意到，由于V是正交矩阵，我们有$V^\top V = I_n$，因此

$$A = U\Sigma V^\top = U\underbrace{V^\top V}_{=I_n}\Sigma V^\top = (UV^\top)(V\Sigma V^\top).$$

现在，令$R = UV^\top$，令$H = V\Sigma V^\top$，我们当然有$A = RH$成立。此外，注意到作为两个正交矩阵的乘积，$R = UV^\top$还是一个正交矩阵(见讲义Theorem 7.5)；显然$H = V\Sigma V^\top$是一个对称矩阵(因为Σ是对角矩阵，因此是对称矩阵)，并且由于H与Σ相似($H = V\Sigma V^\top = (V^\top)^{-1}\Sigma V^\top$)且我们已经证明了$\Sigma$作为对角矩阵，对角线上的元素均为正数(这等价于$\Sigma$的所有特征值均为正数)，利用特征值是相似不变量的性质，可得H的所有特征值也都为正数。因此$A = RH$为所求分解。