高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第六章　微分方程

6.1　微分方程的概念

6.1.1 引例

【引例1】设曲线 $y=f(x)$ 上任意点 (x,y) 处切线的斜率为 $2x$，且曲线经过点 $(1,4)$，求此曲线的方程。

解：由题意知：$y'=2x$，

所以，$y=x^2+c$，其中 c 为常数，

又由 $y|_{x=1}=4$，得 $c=3$，　因此：$y=x^2+3$。

【引例2】设一列车在平直线路上以 $20m/s$ 的速度行驶，当列车制动时，获得加速度为 $-0.4m/s^2$，问列车从制动开始到完全停止共行驶了多少米？ 其中 m 为米，s 为秒。

解：由题意知：$\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=a=-0.4,$

所以，$v=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-0.4t+c_1,\ S=-0.2t^2+c_1t+c_2,$

又由 $S\big|_{t=0}=0,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v\big|_{t=0}=20,$ 得：$c_1=20,c_2=0,$

因此，$S=-0.2t^2+20t,$ 当 $v=0$ 时，$t=50(s),$

故，$S=-0.2\times50^2+20\times50=500\,(m)$。

6.1.2 微分方程的概念

含有自变量、函数及函数的各阶导数的方程：

$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$ 称为微分方程。

- **微分方程的阶**

微分方程中导数的最高阶称为微分方程的阶。

- **微分方程的解**

满足微分方程的函数称为微分方程的解，如果解中含有独立的任意常数且个数等于与阶数相同，则此解称为通解。

确定了任意常数的解称为特解，确定任意常数的条件称为初始条件。

6.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为：$F(x,y,y')=0,$

我们主要讨论一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 的几种特殊类型。

6.2.1 可分离变量的微分方程

可分离变量的微分方程具有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y) \quad \text{或} \quad P(x)\cdot Q(y)\mathrm{d}x+R(x)\cdot S(y)\mathrm{d}y=0$$

分离变量，两边积分：$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+c,$

得微分方程的通解为：$G(y)=F(x)+c$

【例题1】求解微分方程：$y' = \frac{y}{1+x^2}$。

解：分离变量，两边积分：$\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x + c$，

通解为：$\ln|y| = \arctan x + c$，

或 $y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\arctan x}$，其中 $c = \ln|c_1|$ 为常数，

【例题2】求微分方程：$y\,dx+(2x^2-x)\,dy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解。

解：分离变量，两边积分：

$$\int\frac{1}{y}\,dy=\int\frac{1}{x-2x^2}\,dx=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{1-2x}\right]dx$$

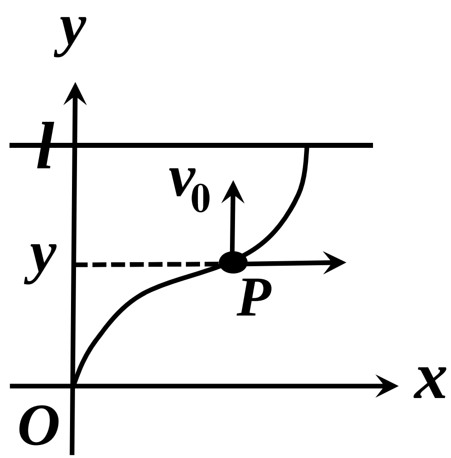
通解为：$\ln|y|=\ln\left|\frac{x}{1-2x}\right|+\ln|c|$，或 $y=\frac{cx}{1-2x}$，

由于 $y|_{x=1}=2$，故 $c=-2$，

特解为：$y=\frac{2x}{2x-1}$。

【例题3】一艘船以指向正北的速度 v_0 朝河对岸驶去，两岸间的距离为 l，设水流速度与其位置到两岸的距离的乘积成正比，比例系数为 k，求船到达河对岸时的位置。

解：建立坐标系，设正北方向为 y 轴正向，水流流向 x 轴正向，设船从原点出发，在 t 时刻位于 $P(x,y)$ 处，



由已知条件可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k\cdot y\cdot(l-y), \end{cases}$$

所以，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{v_0}{k}\cdot\dfrac{1}{y(l-y)}$，是可分离变量的微分方程。

【例题3】解(续):

分离变量，两边积分：$\int(l\,y-y^2)\,\mathrm{d}\,y=\int\frac{v_0}{k}\mathrm{d}\,x$

通解为：$\frac{l}{2}\cdot y^2-\frac{1}{3}\cdot y^3=\frac{v_0}{k}\cdot x+c$,

由于 $y\big|_{x=0}=0$，故 $c=0$,

所以，特解为：$x=\frac{k}{v_0}(\frac{l}{2}\cdot y^2-\frac{1}{3}\cdot y^3)$,

当 $y=l$ 时，有 $x=\frac{kl^3}{6v_0}$。

6.2.2 齐次微分方程

形如：$\dfrac{dy}{dx}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次微分方程，

简称齐次方程。

令 $u=\dfrac{y}{x}, y=x\cdot u$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\cdot\dfrac{du}{dx}$，

此时原方程化为 $u+x\cdot\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)$ 是可分离变量的微分方程，

分离变量，两边积分：$\displaystyle\int\frac{1}{\varphi(u)-u}du=\int\frac{1}{x}dx$，

微分方程的通解为：$\Phi(u)=\ln|x|+c$，或 $\Phi(\dfrac{y}{x})=\ln|x|+c$。

【例题4】求微分方程：$x\cdot y'=y+x\cdot e^{\frac{y}{x}}$。

解：先将微分方程化为：$y'=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$ 是齐次方程，

令 $u=\dfrac{y}{x}, y=x\cdot u$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\cdot\dfrac{du}{dx}$，

此时原方程化为 $u+x\cdot\dfrac{du}{dx}=u+e^{u}$

分离变量，两边积分：$\displaystyle\int\frac{1}{e^{u}}du=\int\frac{1}{x}dx$

通解为：$-e^{-u}=\ln|x|+c$，或 $-e^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+c$。

【例题5】求微分方程：$y\cdot \mathrm{d}x-(x+y\cdot\tan\frac{x}{y})\mathrm{d}y=0$。

解：此题是齐次微分方程的一种变化形式，

考虑把 y 看成自变量，而把 x 看成因变量，

原方程化为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\tan\frac{x}{y}$ 是齐次方程，

令 $u=\frac{x}{y}, x=y\cdot u$，则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，

所以：$u+y\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u+\tan u$，$\int\frac{1}{\tan u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y$

通解为：$\ln|\sin u|=\ln|y|+\ln|c|$，或 $\sin\frac{x}{y}=cy$。

【例题6】设 C 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到原点的距离恒等于曲线在该点的切线在 y 轴上的截距，且曲线 C 经过点 $(\frac{1}{2},0)$，求曲线 C 的方程。

解：曲线上的点 $P(x,y)$ 到原点的距离为：$d=\sqrt{x^2+y^2}$，

曲线 C 上经过点 $P(x,y)$ 的切线方程为：$Y-y=y'(X-x)$，

在 y 轴上的截距为：$Y=y-x\cdot y'$，由题意知：

$y-x\cdot y'=\sqrt{x^2+y^2}$，或：$y'=\frac{y}{x}-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$ 是齐次方程。

立志成才 报国裕民

【例题6】解(续):

令 $u=\dfrac{y}{x}, y=x\cdot u$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，故：$x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{1+u^2}$，

分离变量，两边积分：$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

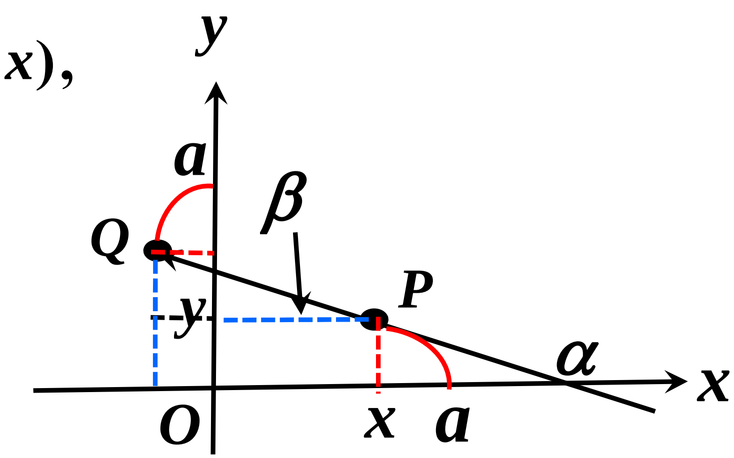
通解为：$\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=-\ln|x|+\ln|c|$，或：$y+\sqrt{x^2+y^2}=c$，

由于曲线经过点 $(\dfrac{1}{2},0)$，故 $c=\dfrac{1}{2}$，

因此，曲线方程为：$y+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$。

【例题7】田野上有四条猎犬，分别在距训犬人距离为 a 的东南西北处，一声令下，每头猎犬均以同样的速度追向其左上侧的猎犬，求初始位置在东面的猎犬的运动轨迹。

解：建立坐标系，设位于东面的猎犬在 t 时刻位于 $P(x,y)$，而位于北面的猎犬在 t 时刻位于 $Q(-y,x)$，



追逐方向为：$\overrightarrow{PQ}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=-\tan\beta=-\frac{x-y}{x+y}=-\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

是齐次方程。

【例题7】 解(续): 令 $u=\dfrac{y}{x}, y=x\cdot u$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

所以： $u+x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1-u}{1+u}$, 或： $x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1-u}{1+u}-u=-\dfrac{1+u^2}{1+u}$,

分离变量，积分 $-\int\dfrac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$,

得通解为： $-\arctan u-\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln|c|$,

或 $-\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln[c(x^2+y^2)]$，由 $y(a)=0$ 得 $c=a^{-2}$,

或 $-\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+y^2}{a^2}$，极坐标形式为： $r=a\cdot\mathrm{e}^{-\theta}$。

立志成才 报国裕民

- 可化为基本型的微分方程

形式一：微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c),(b\neq 0)$

令 $u=ax+by+c$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

微分方程化为：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\cdot f(u)$ 是可分离变量的微分方程。

【例题8】求解微分方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$。

解：令 $u=x+y$，则微分方程化为：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2$,

通解为：$\arctan u=x+c$ 或 $\arctan(x+y)=x+c$。

形式二：微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$,

当 c_1,c_2 不全为零，且 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 时，令：$X=x-x_0, Y=y-y_0$,

则：$a_1x+b_1y+c_1=a_1X+b_1Y+a_1x_0+b_1y_0+c_1$,

$a_2x+b_2y+c_2=a_2X+b_2Y+a_2x_0+b_2y_0+c_2$,

取 (x_0,y_0) 是方程组：$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 的解，

则微分方程化为：$\dfrac{dY}{dX}=f(\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y})=f(\dfrac{a_1+b_1\cdot\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\cdot\frac{Y}{X}})$ 是齐次方程。

【例题9】求解微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y-3}{x+y+1}$。

解：先解方程组：$\begin{cases}x-y-3=0\\ x+y+1=0\end{cases}$ 得：$x_0=1, y_0=-2$，

令 $X=x-1, Y=y+2$，则微分方程化为：$\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{X-Y}{X+Y}$，

设 $u=\dfrac{Y}{X}, Y=X\cdot u$，则 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，

所以，$u+X\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\dfrac{1-u}{1+u}$，$\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}\cdot\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}X}{X}$，

通解为：$\dfrac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=-\ln|X|+\dfrac{1}{2}\ln|c|$，或 $Y^2+2XY-X^2=c$，

故，原微分方程的通解为：$y^2+2xy-x^2+6x+2y-1=0$。

立志成才报国裕民

6.2.3 一阶线性微分方程

形如：$y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdots\cdots\cdots(1)$

的微分方程称为一阶线性微分方程，

其中 $p(x),q(x)$ 为连续函数，$q(x)$ 称为非齐次项。

当 $q(x)\equiv 0$，方程 $y'+p(x)\cdot y=0\cdots\cdots\cdots(2)$

称为齐次线性微分方程，或称非齐次对应的齐次微分方程。

齐次线性微分方程是可分离变量的：$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{y}=-p(x)\cdot\mathrm{d}\,x$

通解为：$\ln|y|=-\int p(x)\mathrm{d}\,x+\ln|c|$ 或：$y=c\cdot\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}\,x}$。

- 一阶线性微分方程：

$$y' + p(x)\cdot y = q(x) \cdots\cdots\cdots(1)$$

解法1：方程 (1) 两边乘上 $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，则可得：

$$[y\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}]' = q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

所以，一阶线性微分方程的通解公式为：

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c]。$$

注意：这种方法称为积分因子法，我们以后会进一步介绍。

- 一阶非齐次线性微分方程：$y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdots\cdots\cdots(1)$

解法2: 常数变易法

由于 (1) 对应的齐次线性微分方程 (2) 的通解为：

$y=c\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，设 $y=c(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 微分方程 (1) 的解，

则 $c'(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)\Rightarrow c(x)=\int q(x)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+c_1$，

所以，同样可得到一阶线性微分方程的通解公式为：

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c]。$$

注意：通解公式要求: (1) 标准化，(2) 一个c。

【例题10】求解微分方程：$x\ln x\cdot\mathrm{d}y+(y-\ln x)\cdot\mathrm{d}x=0$。

解：将微分方程标准化：$y'+\dfrac{1}{x\ln x}\cdot y=\dfrac{1}{x}$ 是一阶线性微分方程，

分两步：先计算 $\int p(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\ln x$，

然后由公式，可得通解为：

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot[\int q(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c]=\mathrm{e}^{-\ln\ln x}\cdot[\int\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{\ln\ln x}\mathrm{d}x+c]$$

$$=\frac{1}{\ln x}(\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+c)=\frac{1}{\ln x}(\frac{1}{2}\ln^2 x+c)。$$

注：一般在求微分方程通解时，不考虑绝对值问题。

【例题11】求解微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y}{6x-y^2}$。

解：考虑微分方程的变化形式，将微分方程化为：

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{6x-y^2}{2y}$，再将微分方程标准化：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{3}{y}\cdot x=-\dfrac{y}{2}$，

而：$\int p(y)\mathrm{d}y=-\int\dfrac{3}{y}\mathrm{d}y=-3\ln y$，

由通解公式得：

$$x=\mathrm{e}^{-\int p(y)\mathrm{d}y}\cdot[\int q(y)\cdot\mathrm{e}^{\int p(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c]$$

$$=\mathrm{e}^{3\ln y}\cdot[\int(-\frac{y}{2})\cdot\mathrm{e}^{-3\ln y}\mathrm{d}y+c]=y^3(\frac{1}{2y}+c)。$$

立志成才 报国裕民

【例题12】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，求 $f(x)$。

解：这是积分方程，通常遇到变上限函数直接选择求导数！

求导得：$f'(x)=f(x)+2\cdot\mathrm{e}^{2x}$，标准化：$f'(x)-f(x)=2\cdot\mathrm{e}^{2x}$，

由通解公式得：

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\cdot\left[\int 2\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=\mathrm{e}^{x}\cdot[2\mathrm{e}^{x}+c]。$$

注意：此题有隐含初始条件：$f(0)=1$，所以：$c=-1$，

因此：$f(x)=2\cdot\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$。

思考：能否对积分方程求导？

6.2.4 伯努里(Bernoulli)方程

形如：$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\lambda}\ (\lambda \neq 0,1)$

的微分方程称为伯努里(Bernoulli)方程。

作变量代换，令 $z = y^{1-\lambda}$，则 $z' = (1-\lambda)\cdot y^{-\lambda}\cdot y'$，

原微分方程化为：$z' + (1-\lambda)\cdot p(x)\cdot z = (1-\lambda)\cdot q(x)$

是一阶线性微分方程。

【例题13】求解微分方程：$y\,\mathrm{d}x-(x-x^2\ln y)\,\mathrm{d}y=0$。

解：考虑微分方程的变化形式，将微分方程化为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}\cdot x=-\frac{\ln y}{y}\cdot x^2$$ 是伯努里方程，

令：$z=x^{-1}$，则原微分方程化为：$z'+\frac{1}{y}\cdot z=\frac{\ln y}{y}$，

由通解公式得：

$$z=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\cdot\left[\int\frac{\ln y}{y}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right]=\frac{1}{y}\left(\int\ln y\,\mathrm{d}y+c\right)=\frac{1}{y}(y\ln y-y+c),$$

原微分方程的通解：$x^{-1}=\frac{1}{y}(y\ln y-y+c)$。

【例题14】求解微分方程：$x\cdot(e^{y}-y')=2$。

解：微分方程可化为：$y'=e^{y}-\dfrac{2}{x}$，怎么办？

作变量代换，令 $u=e^{y}$，则 $u'=e^{y}\cdot y'=u\cdot y'$，

原微分方程化为：$u'=u\cdot(u-\dfrac{2}{x})$，$u'+\dfrac{2}{x}\cdot u=u^{2}$ 是伯努里方程，

令：$z=u^{-1}$，则：$z'-\dfrac{2}{x}\cdot z=-1$，由通解公式得：

$$z=e^{-\int(-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}\cdot\left[\int(-1)\cdot e^{\int(-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]=x^{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+c\right),$$

原微分方程的通解：$e^{-y}=x+cx^{2}$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢　谢！