高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第五章 积分学

5.5 定积分的计算

5.5.5 定积分的综合例题

【例题1】设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内可导，且 $f(0)=0$,

求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\cdot f(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}$。

解：设 $x^2-t^2=u$, 则 $t\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$, $\int_0^x t\,f(x^2-t^2)\mathrm{d}\,t=-\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u$

所以 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)\cdot x}{4x^3}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\dfrac{1}{4}f'(0)$。

【例题2】设函数 $f(x),g(x)\in R[a,b]$, 证明许瓦兹不等式:

$$[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x]^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$ 。(Schwarz)

证明: 由于 $[t\cdot f(x)+g(x)]^2\ge 0\Rightarrow t^2\cdot f^2(x)+2t\cdot f(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$,

在 $[a,b]$ 上积分得

$$t^2\cdot\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\cdot\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0$$

由于 t 为任意实数，所以 $\Delta\le 0$,

即 $[2\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x]^2\le 4\cdot\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$, 证毕。

【例题3】设函数 $f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期的周期函数且连续，证明：

$$G(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$ 也是以 $T=2$ 为周期的周期函数。

证明：$G(x+2)-G(x)=2\int_x^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

$$[G(x+2)-G(x)]'=2\cdot[f(x+2)-f(x)]=0$$

所以 $G(x+2)-G(x)\equiv C$，又 $G(0)=0, G(2)=0$，故 $C=0$，

即 $G(x+2)=G(x)$，证毕。

【例题4】设函数 $f(x)$ 连续且满足 $f(x)=\ln x-2x^2\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$，求 $f(x)$。

解：当函数可积时，定积分是一个常数！

设 $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=A$，则 $f(x)=\ln x-2x^2\cdot A$，

所以 $A=\int_1^e \frac{\ln x-2x^2\cdot A}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e-A\cdot x^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}-A(e^2-1)$

故 $A=\frac{1}{2e^2}$，$f(x)=\ln x-\frac{1}{e^2}\cdot x^2$。

【例题5】求函数 $y=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间和极值。

解：$y=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}t\cdot e^{-t^2}dt$，

$$y'=2x\cdot\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+x^2e^{-x^4}\cdot 2x-x^2e^{-x^4}\cdot 2x=2x\cdot\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt,$$

$y'=0\Rightarrow x=0, x=\pm 1$， 列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	*	$\searrow$	0	$\nearrow$

单调增区间：$(-1,0),(1,+\infty)$，

单调减区间：$(-\infty,-1),(0,1)$，

极小值 $f_{\min}(\pm 1)=0$，极大值 $f_{\max}(0)=\int_0^1 t\cdot e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$。

【例题6】设函数 $f(x)\in D[0,1]$，且 $f(1)=k\cdot\int_0^{\frac{1}{k}} x\cdot e^{1-x}\cdot f(x)\mathrm{d}x,\ (k>1)$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$。

证明：作函数 $F(x)=x\cdot e^{1-x}\cdot f(x)$，则由积分中值定理得：

$$F(1)=f(1)=k\cdot\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)\mathrm{d}x=F(\eta),\eta\in[0,\frac{1}{k}],$$

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

而 $F'(x)=e^{1-x}\cdot f(x)-x\cdot e^{1-x}\cdot f(x)+x\cdot e^{1-x}\cdot f'(x)$

$e^{1-\xi}\neq0$，故 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$，证毕。

立志成才 报国裕民

【例题7】设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上非负，且 $f(0)=0, f''(x)>0,$

证明：$\int_0^a x f(x)\mathrm{d}x > \frac{2a}{3}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

证明：作函数 $F(t)=\int_0^t x f(x)\mathrm{d}x-\frac{2t}{3}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$，则：$F(0)=0,$

而 $F'(t)=t\cdot f(t)-\frac{2}{3}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{2t}{3}\cdot f(t)=\frac{t}{3}\cdot f(t)-\frac{2}{3}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$

$F'(0)=0,$ 又 $F''(t)=\frac{1}{3}\cdot f(t)+\frac{t}{3}\cdot f'(t)-\frac{2}{3}f(t)=\frac{t}{3}\cdot f'(t)-\frac{1}{3}f(t)$

$F''(0)=0,$ 又 $F'''(t)=\frac{1}{3}\cdot f'(t)+\frac{t}{3}\cdot f''(t)-\frac{1}{3}f'(t)>0,$

所以，当 $x>0$ 时，$F''(t)>F''(0)=0\Rightarrow F'(t)>F'(0)=0\Rightarrow F(t)>F(0)=0,$

证毕。

【例题8】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，证明：

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \geq \max_{a\le x\le b}|f(x)|。$$

证明：由积分中值定理知，$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$，

而由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $\exists x_0\in[a,b]$，使得 $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(x_0)|$，

如果 $\xi=x_0$ 不等式显然成立；

当 $\xi\neq x_0$ 时，$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x\geq\left|\int_\xi^{x_0}|f'(x)|\mathrm{d}x\right|\geq\left|\int_\xi^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(x_0)-f(\xi)|$

因此，左 $\geq|f(\xi)|+|f(x_0)-f(\xi)|\geq|f(x_0)|=$ 右，证毕。

【例题9】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\neq 0$，证明：$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4$。

证明：由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，知 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=|f(x_0)|$，

显然 $x_0\in(0,1)$，所以：$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq\dfrac{1}{|f(x_0)|}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$，

分别在 $[0,x_0],[x_0,1]$ 应用拉格朗日定理得：

$f(x_0)-\overset{0}{\cancel{f(0)}}=f'(\xi)\cdot x_0$，$\overset{0}{\cancel{f(1)}}-f(x_0)=f'(\eta)(1-x_0)$，其中 $\xi\in(0,x_0),\eta\in(x_0,1)$，

由于 $\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geq\left|\int_\xi^\eta|f''(x)|\mathrm{d}x\right|\geq|f'(\eta)-f'(\xi)|$

$$=\left|\frac{-f(x_0)}{1-x_0}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|=|f(x_0)|\cdot\frac{1}{(1-x_0)\cdot x_0}\geq 4|f(x_0)|$$，证毕。

【例题10】设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，

证明：$\exists\xi\in[-a,a]$，使得 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^3}{3}f''(\xi)$。

证明：由一阶泰勒公式知：

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}f''(\eta)\cdot x^2$$，其中 η 介于 $0,x$ 之间，

由已知条件得：$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)\cdot x^2\,\mathrm{d}x$，

又由 $f(x)$ 二阶导数连续可得：$\exists m,M$，使得 $m\le f''(x)\le M$

所以 $m\cdot x^2\le f''(\eta)\cdot x^2\le M\cdot x^2$，因此 $m\cdot\dfrac{a^3}{3}\le\dfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)\cdot x^2\,\mathrm{d}x\le M\cdot\dfrac{a^3}{3}$

或 $m\le\dfrac{\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)\cdot x^2\,\mathrm{d}x}{\frac{a^3}{3}}\le M$，故 $\dfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\eta)\cdot x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^3}{3}f''(\xi)$，证毕。

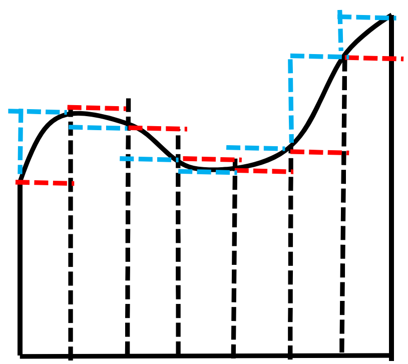
立志成才 报国裕民

5.5.6 定积分的近似计算*

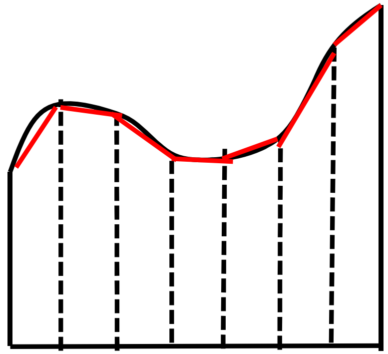
由于定积分的几何意义是曲边梯形的面积，而存在很多函数没有初等形式的原函数，给定积分计算带来困难，如果能够计算曲边梯形的面积，那么面积的近似值就可以作为定积分的近似值。

- 矩形法

把曲边梯形分成若干小块，用小矩形的面积来代替小曲边梯形的面积，这种方法称为矩形法。



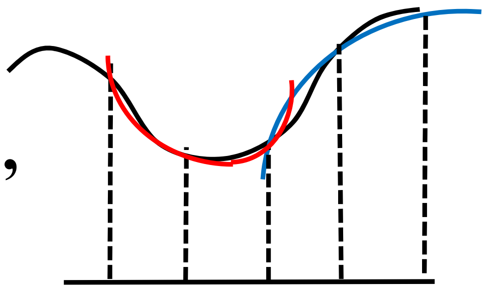
- 梯形法



把曲边梯形分成若干小块，用小梯形的面积来代替小曲边梯形的面积，这种方法称为梯形法。

矩形法和梯形法的基本思想是在各个小段上以直线代替曲线，为了提高精度，可用简单曲线来代替曲线。

- 抛物线法又称辛普生(Simpson)方法



用抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 来代替曲线 $y=f(x)$,

注意：需将积分区间 $[a,b]$ 分割成 $2n+1$ 等分，略。

5.6 定积分的应用

5.6.1 定积分的元素法

在定积分存在的条件下，可将定积分简化为两个步骤：

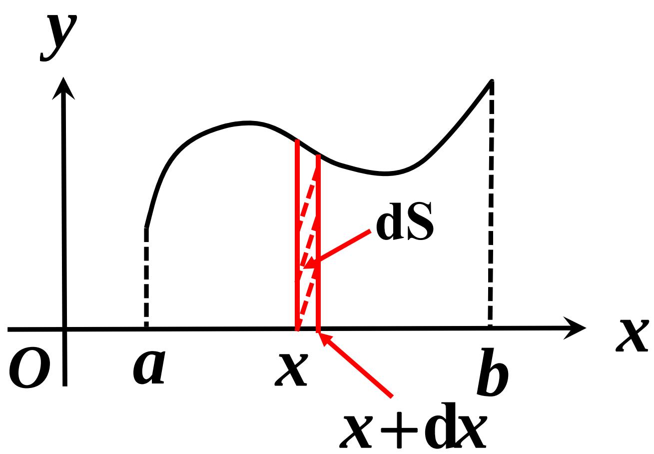
(1) 选取积分变量如 x，确定积分变量的变化区间如 $[a,b]$，

在积分区间内任取小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，

得到积分元素 $\mathrm{d}S=f(x)\mathrm{d}x$，

(2) 在积分区间 $[a,b]$ 上对积分元素进行积分：

$$S=\int_a^b \mathrm{d}S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$



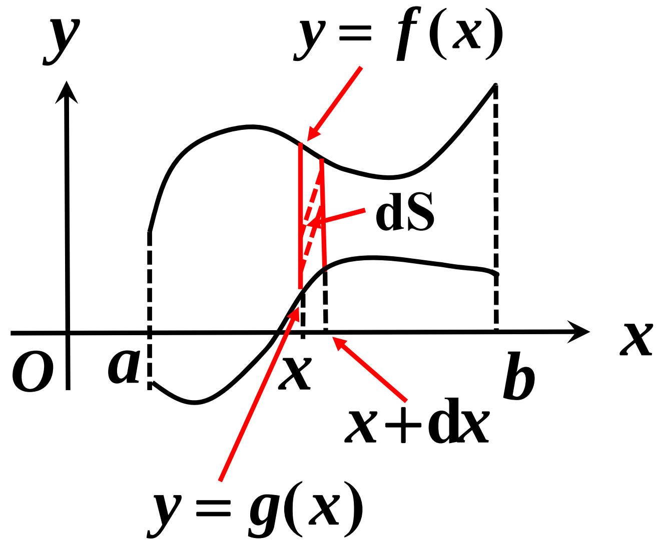
这种方法称为定积分的元素法。相当于将直线的“面积”连续相加。

5.6.2 定积分的几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标 ---" X "型

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq g(x),\forall x\in[a,b]$，计算由曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 与直线 $x=a,x=b$, 所围平面图形的面积。



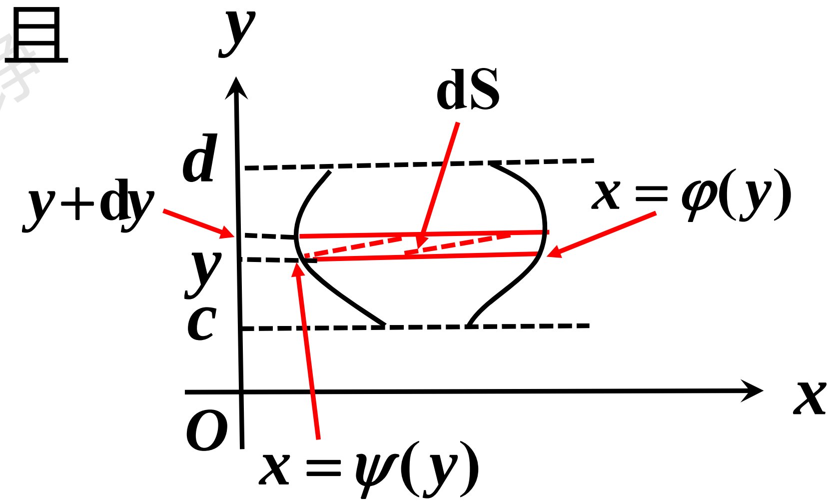
取积分变量为 x, 变化区间为 $[a,b]$, 由元素法可得:

$$S=\int_a^b \mathrm{d}\,S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}\,x。$$

- 平面图形的面积

(2) 直角坐标 ---"Y" 型

设函数 $\varphi(y),\psi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，且 $\varphi(y)\ge\psi(y),\forall y\in[c,d]$，计算由曲线 $x=\varphi(y),x=\psi(y)$ 与直线 $y=c,y=d$，所围平面图形的面积。

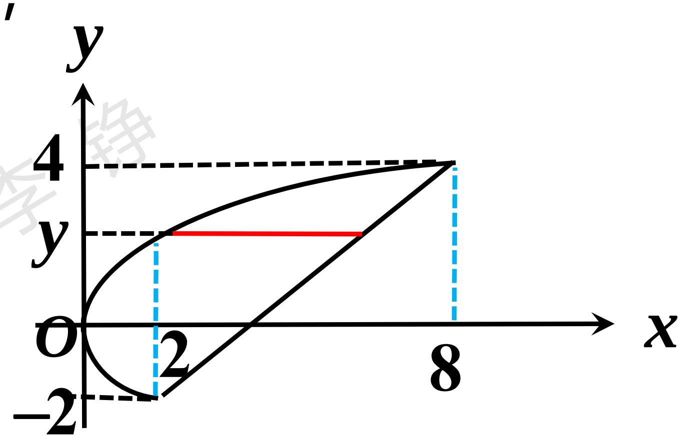


取积分变量为 y 变化区间为 $[c,d]$，由元素法可得：

$$S=\int_c^d \mathrm{d}\,S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\,\mathrm{d}\,y。$$

【例题11】求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积。

解：两曲线的交点为：$(2,-2),(8,4)$，如图，



选择 "Y" 型计算，

$$S=\int_{-2}^{4}[(y+4)-\frac{1}{2}y^2]\,\mathrm{d}y$$

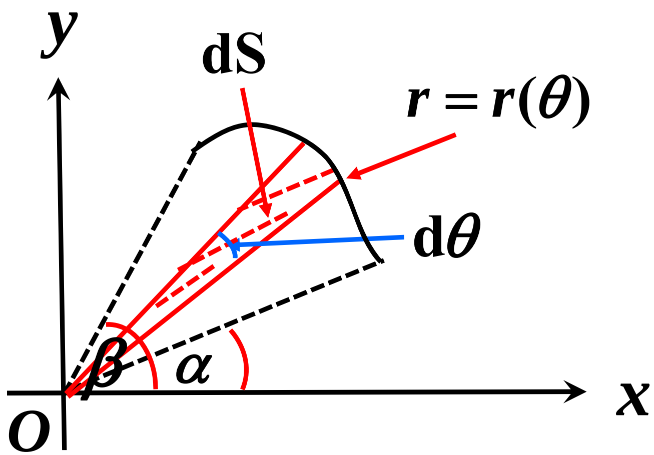
$$=(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3)\Big|_{-2}^{4}=18。$$

注意：如果选择 "X" 型计算，需要分两部分计算。

- 平面图形的面积

(3) 极坐标

计算由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 表示的连续曲线与射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 所围成的曲边扇形的面积。



取积分变量为 θ, 变化区间为 $[\alpha,\beta]$,

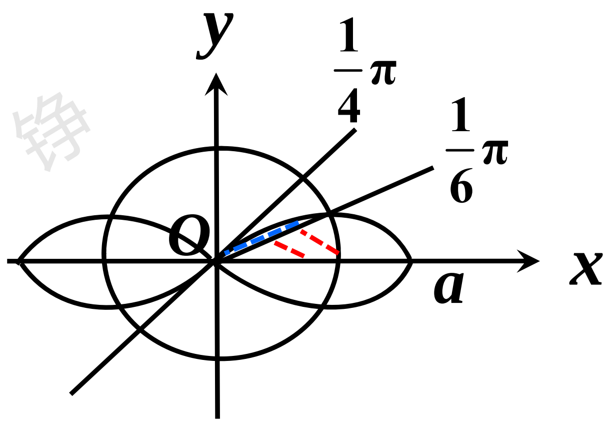
由元素法可得：$\mathrm{d}S=\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$,

$$S=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta。$$

【例题12】求双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 在圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2$ 内部分的面积。

解：双纽线的极坐标方程为：$r^2=a^2\cos 2\theta$

圆的方程为：$r^2=\frac{1}{2}a^2$



由对称性，只需计算第一挂限部分，

在第一挂限内的交点为：$\theta=\frac{1}{6}\pi$

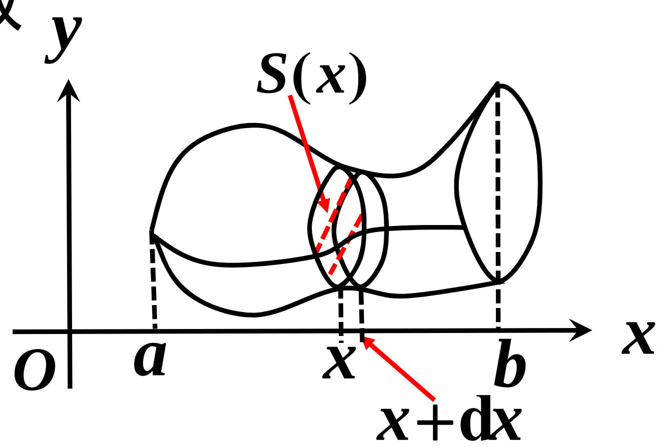
注意：双纽线有两条切线：$\theta=\pm\frac{1}{4}\pi$，所求面积由两部分组成，

$$S=4\cdot\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{6}\pi}\frac{1}{2}a^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\right]=\frac{1}{6}\pi a^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2。$$

立志成才 报国裕民

2. 平行截面面积为已知的立体体积

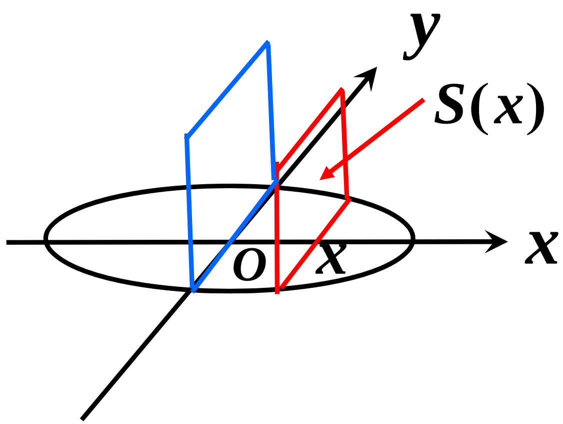
设一个空间立体 Ω, 如果用垂直于 Ox 轴的平面去截该立体得到的截面面积是 x 的连续函数 $S(x), x \in [a,b]$, 那么该立体的体积可由定积分元素法计算得到, 如图,



取积分变量为 x, 变化区间为 $[a,b]$, 在点 x 处, 截面面积为: $S(x)$, 在小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$上的积分元素(体积元素)为: $\mathrm{d}V = S(x)\mathrm{d}x$,

故所求体积为: $V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$。

【例题13】有一个立体，以椭圆 $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ 为底，垂直于 x 轴的截面都是正方形，求其体积。



解：取积分变量为 x，变化区间为 $[-10,10]$，

在点 x 处，截面面积为：

$$S(x)=(2y)^2=4\cdot 5^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{10^2}\right)=100-x^2,$$

在小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的积分元素(体积元素)为：

$$\mathrm{d}V=S(x)\,\mathrm{d}x,$$

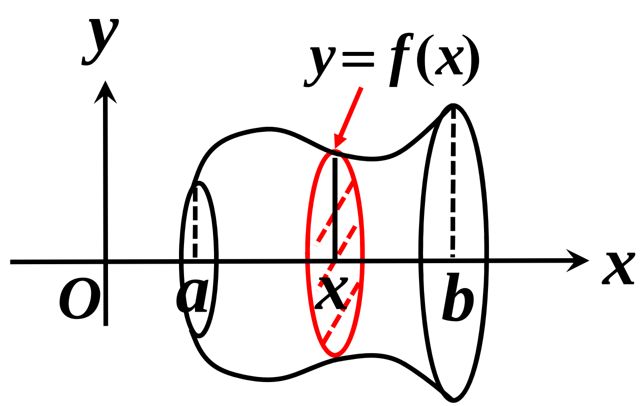
故所求体积为：$V=\int_{-10}^{10}\mathrm{d}V=\int_{-10}^{10}(100-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4000}{3}$。

- 旋转体的体积

计算由连续曲线 $y=f(x)$ 直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围平面图形

(1) 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积；

(2) 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。



解：(1) 取积分变量为 x,变化区间为 $[a,b]$,

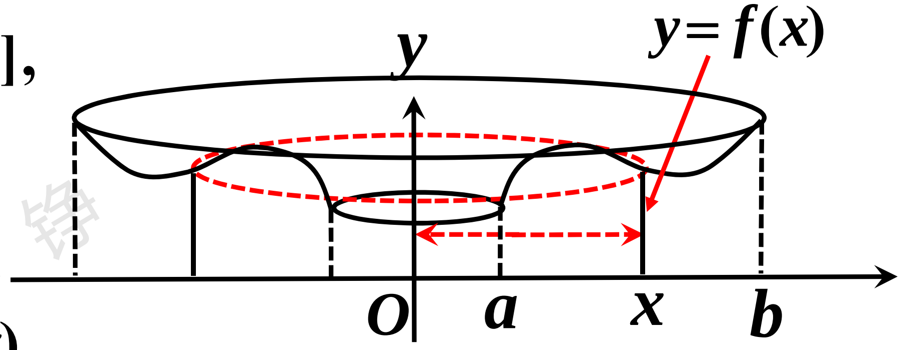
在点 x 处，截面面积为：$S(x)=\pi f^2(x)$,

在小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$上的积分元素(体积元素)为：$\mathrm{d}V=S(x)\mathrm{d}x$,

故旋转体体积为：$V_x=\int_a^b \mathrm{d}V=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。

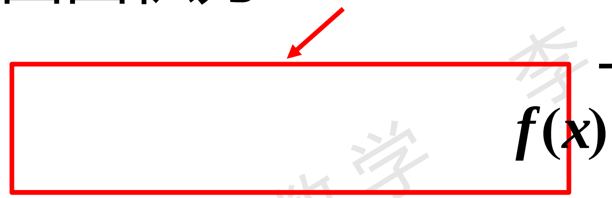
- 旋转体的体积

解：(2) 取积分变量为 x，变化区间为 $[a,b]$，



在点 x 处，截面面积为：$2\pi x$

$S(x)=2\pi x\cdot f(x)$，



在小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的积分元素(体积元素)为：

$\mathrm{d}V=S(x)\mathrm{d}x$，

故旋转体体积为：$V_y=\int_a^b \mathrm{d}V=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot f(x)\mathrm{d}x$。

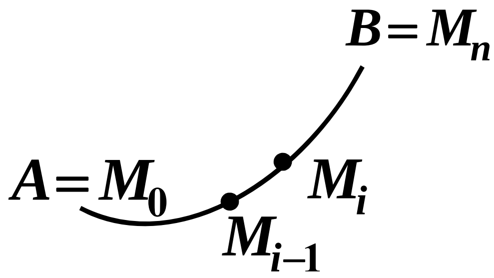
这种求体积的方法称为“薄壳法”。

3. 平面曲线的弧长

定理：设平面曲线弧段AB的方程为：$y=f(x),(a\le x\le b)$,

其中:$f\in C^{(1)}[a,b]$，则弧段AB是可求长的,

且其弧长为：$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$。



证明：详细证明见书《微积分》(上册) p285,

下面给出证明的基本思想及主要步骤：

由定积分定义，将弧段AB分割成n小段，$M_i(x_i,y_i),(i=1,2,\cdots,n)$

小弧段$M_{i-1}M_i$的长度为:$|M_{i-1}M_i|\approx\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}\cdot\Delta x_i$,

注意:$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(\xi_i)$, 再求和、求极限即可得证，略。

- 平面曲线的弧长

弧微分：$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$。

(1). 直角坐标

设平面曲线方程为：$y=f(x),(a\le x\le b)$，其中：$f\in C^{(1)}[a,b]$，则

弧微分：$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$，

弧长：$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$。

【例题14】求圆 $x^2+y^2=R^2$ 的周长。

解：$s=8\cdot\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=8\cdot\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x=8R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}=2\pi R$。

【例题15】求曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的全长。

解： $y'=\sqrt{3-x^2}$，

弧长 $s=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

令 $x=2\sin u$，则：

$$S=\int_{-\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}4\cos^2u\,\mathrm{d}u=2\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi}4\cos^2u\,\mathrm{d}u=(4u+2\sin 2u)\Big|_{0}^{\frac{1}{3}\pi}=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}\,。$$

- 平面曲线的弧长

(2). 参数方程

设平面曲线方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, (\alpha \le t \le \beta),$

其中：$\varphi(t), \psi(t) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$，则

弧微分：$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$，

弧长：$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$。

【例题16】求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, (a>0)$ 的全长。

解： $\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \cdot \sin t, \psi'(t) = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$,

所以，弧长：

$$s = 4 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t = 12a \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = 6a\text{。}$$

- 平面曲线的弧长

(3). 极坐标

设平面曲线的极坐标方程为：$r=r(\theta),\ (\alpha\le t\le\beta)$,

其中：$r(\theta)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$,

将曲线化为参数方程为：$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases},\ (\alpha\le t\le\beta)$，则

弧微分： $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$,

弧长：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\ \mathrm{d}t$。

【例题17】求心脏线 $r = a(1+\cos\theta),(a>0)$ 的全长。

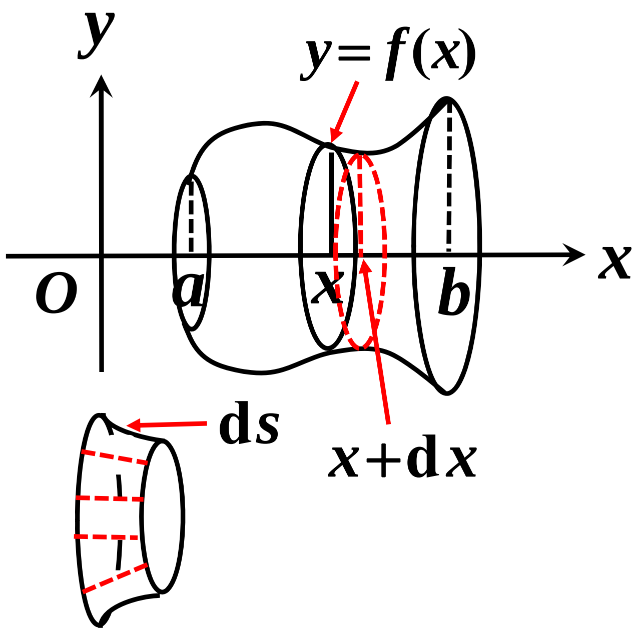
解：直接由弧长计算公式得：

$$s = 2\cdot\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\cdot\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 8a\text{。}$$

4. 旋转曲面的面积

设光滑曲线方程为 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$，求曲线绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的面积。



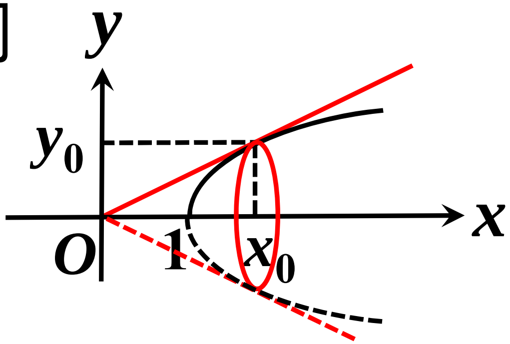
利用元素法，取积分变量为 x，变化区间为 $[a,b]$，在小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的积分元素(面积元素)为：$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}s$，

注意：是一窄条的面积，宽度为小弧长：$\mathrm{d}s$

因此，旋转曲面的面积为：

$$S=\int_a^b \mathrm{d}S=\int_a^b 2\pi f(x)\mathrm{d}s=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x。$$

【例题18】经过原点求曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线，并求由曲线、切线及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。



解：设切点为：$(x_0,y_0)=(x_0,\sqrt{x_0-1})$，

则切线方程为：$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

或：$y-\sqrt{x_0-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$，由于切线经过原点，所以 $x_0=2$，

故切线方程为：$y=\dfrac{1}{2}x$，旋转曲面的表面积由两部分组成，

$$S_1=S_{抛}=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1),$$

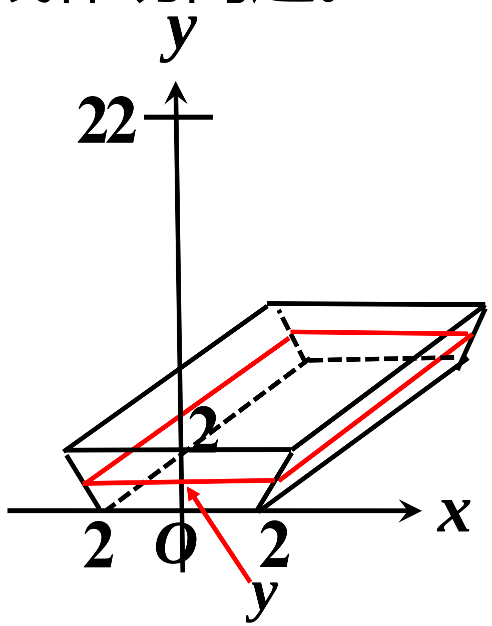
$$S_2=S_{锥}=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\,\pi，$$ 故：$S=S_1+S_2=\dfrac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$。

5.6.3 定积分的物理应用 $^{\Delta}$

1. 变力沿直线运动作功

通过例题说明如何应用元素法解决变力沿直线作功问题。

【例题19】设一个横截面为等腰梯形的蓄水池，梯形上底为6米，下底为4米，高为2米，水池长为8米，蓄满了水，现要将水池中的水全部抽到距水面20米高的水塔，问需作多少功?



解：建立如图坐标系，应用定积分元素法，

注意：变力沿直线作功问题，形象描述为“$\rho\cdot g\cdot h$+元素法”。

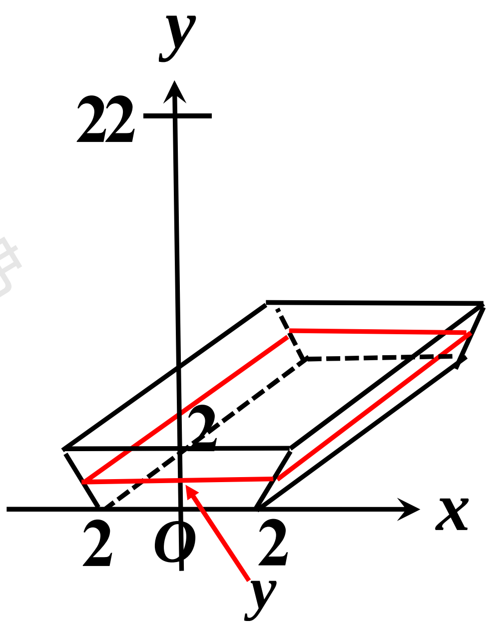
解：取积分变量为 y, 变化区间为 $[0,2]$,

在小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 上的积分元素为：

$$\mathrm{d}W=\rho\cdot g\cdot(22-y)\cdot S(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中，$S(y)=8\cdot 2x=8\cdot(y+4)$，$\rho$ 为水密度，

g 为重力加速度。



注：相当于把一层水(或冰)抽到水塔。

因此，所作的功：

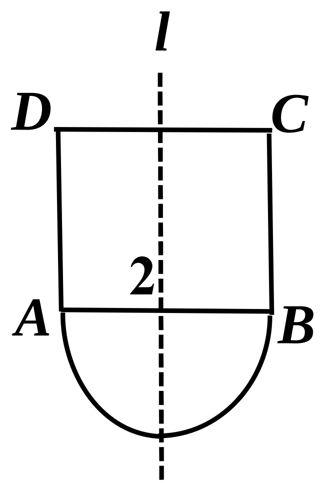
$$W=\int_0^2\rho\cdot g\cdot(22-y)\cdot 8\cdot(y+4)\,\mathrm{d}y=8\rho\cdot g\cdot\int_0^2(88+18y-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{4924}{3}\rho\cdot g。$$

2. 液体的静压力(水压力)

同样通过例题说明如何解决静压力问题。

【例题20】某个闸门的形状与大小描述如下：

以直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，其中线段 AB 的长度为 2米，当水面与闸门的上端持平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$，则闸门矩形部分的高应为多少米?



解：静压力(或水压力)问题，同样可形象描述为“$\rho\cdot g\cdot h$+元素法”。

解：水压力为：$P=p\cdot S=\rho\cdot g\cdot h\cdot S$，其中，$p,\rho,g,h,S$

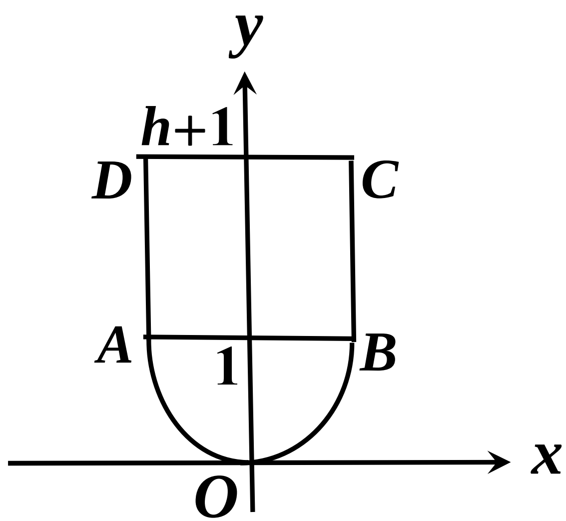
分别为：压强、水密度、重力加速度、到水面距离、截面积。

建立如图坐标系，设抛物线方程为：$y=x^2$，

应用定积分元素法，取积分变量为 y，

分别计算两部分承受的水压力，

矩形部分承受的水压力为：



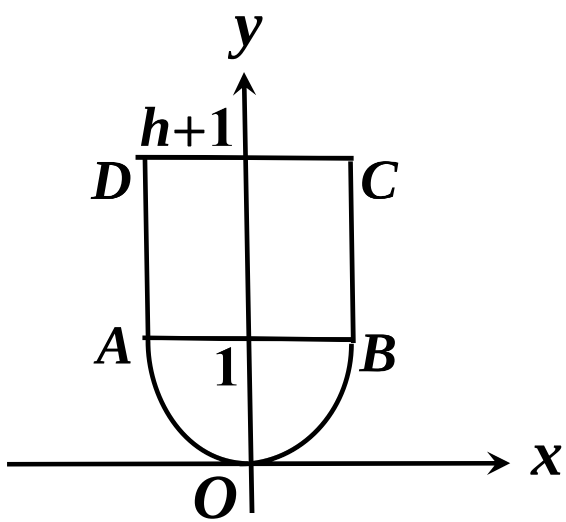
$$P_1=\int_1^{h+1}\rho\cdot g\cdot(h+1-y)\cdot 2\,\mathrm{d}y=\rho\cdot g\cdot[2(h+1)y-y^2]\Big|_1^{h+1}=\rho\cdot g\cdot h^2,$$

解(续):

闸门下部分承受的水压力为:

$$P_2=\int_0^1\rho\cdot g\cdot(h+1-y)\cdot 2\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

$$=2\rho\cdot g\cdot\left[\frac{2}{3}(h+1)\cdot y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\cdot y^{\frac{5}{2}}\right]\Bigg|_0^1=4\rho\cdot g\cdot\left(\frac{h}{3}+\frac{2}{15}\right),$$



由题意知: $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{5}{4}$, 即: $4\cdot\rho\cdot g\cdot h^2=5\cdot 4\rho\cdot g\cdot\left(\dfrac{h}{3}+\dfrac{2}{15}\right)$

解得: $h=2,h=-\dfrac{1}{3}$ (舍去),

故闸门矩形部分的高应为2米。

5.7 反常积分(又称广义积分)

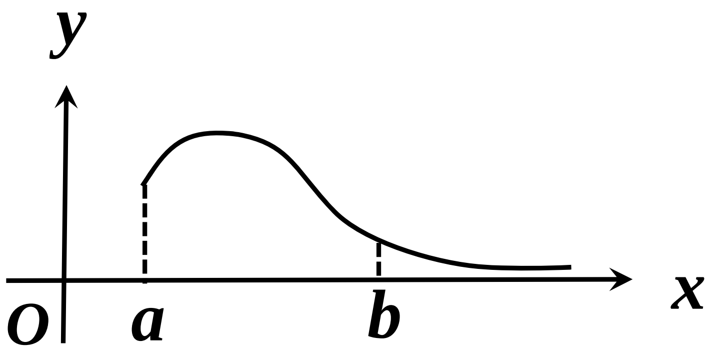
5.7.1 无穷区间上的反常积分

定义1: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall b>a,\ f\in R[a,b]$，

若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，

且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，

反之，称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。



【例题21】计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}\mathrm{d}x$。

解：由于

$$\int_1^b\frac{1}{x^2(1+x)}\mathrm{d}x=\int_1^b\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{x}-\ln x+\ln(1+x)\right]\Big|_1^b=-\frac{1}{b}+\ln\frac{1+b}{b}+1-\ln 2,$$

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2(1+x)}\mathrm{d}x=1-\ln 2$。

【例题22】计算 $\int_1^{+\infty} x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$。

解：由于 $\int_1^{b} x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x=(-x\cdot\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x})\Big|_1^b=-\dfrac{b+1}{\mathrm{e}^b}+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$,

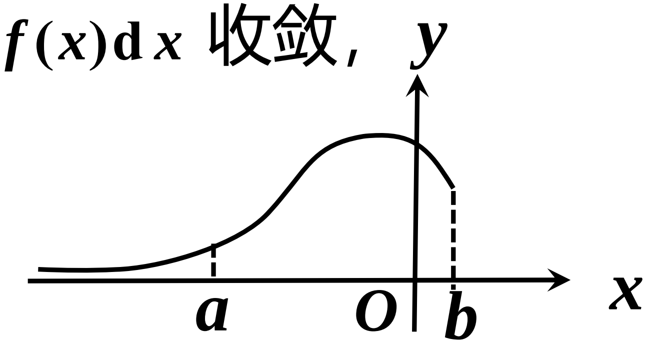
而 $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b+1}{\mathrm{e}^b}=0$,

所以 $\int_1^{+\infty} x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^{b} x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$。

定义2：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上有定义，且 $\forall a<b,\ f\in R[a,b]$，

若极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，

且 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，



反之，称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定义3：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若存在常数 $c\in\mathrm{R}$，

使得反常积分 $\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x,\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称反常积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，

反之，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

【例题23】设 a,k 为常数，且 $a>0$，问 k 何值时，反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^k}\mathrm{d}x$$ 收敛?

解：当 $k=1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_a^{+\infty}=\infty$ 发散;

当 $k\neq 1$ 时，$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^k}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-k}}{1-k}\Bigg|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & k<1\\ -\dfrac{a^{1-k}}{1-k}, & k>1\end{cases}$$

所以，反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^k}\mathrm{d}x$ 当 $k>1$ 时，收敛，

反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^k}\mathrm{d}x$ 当 $k\leq 1$ 时，发散。

问题：反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 是否收敛?

【例题24】计算 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$。

解法1：令 $x=\sec t$，

则 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\cdot\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}$；

解法2：令 $x=\frac{1}{u}$，

则 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u=\arcsin u\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$。

注意：计算反常积分通常不需要讨论敛散性。

5.7.2 无界函数的反常积分

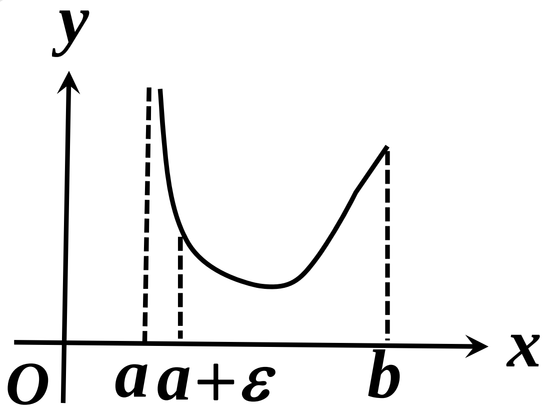
定义4: 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义，且 $f(a^+)=\infty$ 或 $f(a+0)=\infty$,

$\forall \varepsilon>0, f\in R[a+\varepsilon,b]$，若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，

则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，

且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$,

反之，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。



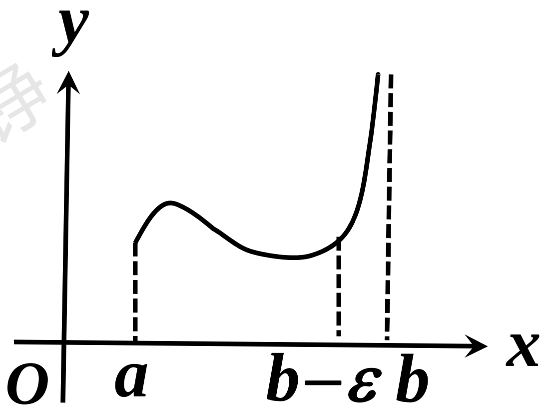
定义5：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，且 $f(b^-)=\infty$ 或 $f(b-0)=\infty$，

$\forall \varepsilon>0, f\in R[a,b-\varepsilon]$，若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，

则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，

且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$，

反之，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。



定义6：设函数 $f(x)$ 在 $[a,c),(c,b]$ 上有定义，且 $f(c)=\infty$，

若反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称反常积分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，

反之，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

【例题25】问 k 何值时，反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$ 收敛?

解：当 $k=1$ 时，$\int_a^b \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln(x-a)\big|_a^b = \infty$ 发散；

当 $k \neq 1$ 时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}\Bigg|_a^b = \begin{cases} \infty, & k>1 \\ \frac{(b-a)^{1-k}}{1-k}, & k<1 \end{cases}$

所以，反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$ 当 $k<1$ 时，收敛，

反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$ 当 $k \geq 1$ 时，发散。

【例题26】计算 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\,\mathrm{d}x$。

解：$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

$= \arcsin x\Big|_0^1 + \ln|x+\sqrt{x^2-1}|\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \ln|2+\sqrt{3}|$。

【例题27】计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$。

解：令 $x = \sec^2 t$,

则 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec^2 t\cdot\tan t}\cdot 2\sec t\cdot\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t = \pi$。

【例题28】计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})(1+x)}\mathrm{d}x$。

解：令 $x=\tan^2 t$,

则 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})(1+x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan t\cdot(1+\tan t)\cdot\sec^2 t}\cdot 2\tan t\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan t}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$。

立志成才 报国裕民

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！