高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第五章 积分学

5.4 定积分的概念

5.4.1 定积分的定义

1. 定积分定义的引入

【引例1】变速直线运动的路程

设某个物体作变速直线运动，已知速度 $v(t)\geq 0$ 是 $[T_1,T_2]$ 上的连续函数，计算在这个时间段内该物体所经过的路程。

我们知道，匀速直线运动的路程为 $s=v\cdot t$，

问题：变速运动路程怎么求?

【引例1】

- 基本思想：局部以不变代变！
- 基本步骤：分割、取值(近似)、求和、求极限。

(1) 分割：将时间段 $[T_1,T_2]$ 分割成 n 个小时间段

$$[t_{i-1},t_i], T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2,$$

(2) 取值(近似)：在小时间段上取点 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上的平均

速度和路程近似为：$\overline{v_i}\approx v(\xi_i), \Delta s_i\approx v(\xi_i)\cdot(t_i-t_{i-1})=v(\xi_i)\cdot\Delta t_i$

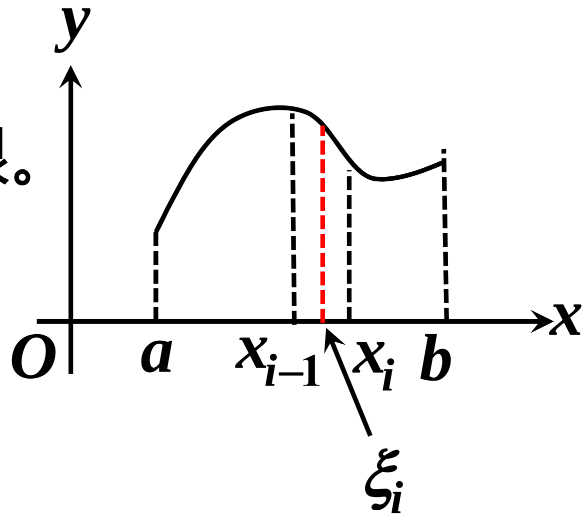
(3) 求和：在 $[T_1,T_2]$ 上物体经过的路程为 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\cdot\Delta t_i$，

(4) 求极限：令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}\to 0$， 则 $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)\cdot\Delta t_i$。

【引例2】曲边梯形的面积

设函数 $f(x)\ge 0$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，求由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围曲边梯形的面积。

- 基本思想：局部以不变代变!
- 基本步骤：分割、取值(近似)、求和、求极限。



(1) 分割：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,

(2) 取值(近似)：$\xi_i\in[x_{i-1},x_i], \Delta S_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$

(3) 求和：$S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$,

(4) 求极限：令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$，则 $S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$。

2. 定积分定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，对 $[a,b]$ 作任意的分割：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在 $[x_{i-1},x_i]$ 内任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，如果和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时有确定的极限值 I，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，记作：$f\in R[a,b]$，把极限值 I 称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，也称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，记作：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$，其中 a,b 分别称为积分下限和上限，把 $[a,b]$ 称为积分区间。

3. 定积分存在定理

由定积分的定义知，函数可积要求对于任意分割、任意取值和式有确定的极限值，这显然是做不到的，在本课程中我们直接给出定积分存在的充分条件：

- 定理1(定积分存在定理)：

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续或在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或 $f\in R[a,b]$。

- 定积分的几何意义：曲边梯形的面积。

【例题1】利用定积分定义计算 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$。

解：显然函数 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上连续，故函数在 $[0,1]$ 上可积。

此时，可选择最简单的分割将 $[0,1]$ n 等分，则 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，

在 $[x_{i-1},x_i]$ 上取 $\xi_i=x_i=\dfrac{i}{n}$，

所以 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}$。

【例题2】利用定积分定义计算 $\int_1^2 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$。

解：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上连续，故函数在 $[1,2]$ 上可积。

立志成才 报国裕民

【例题2】解:

在 $[1,2]$ 内插入 $n-1$ 个分点: $1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=2$,

使得 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成等比数列，即 $x_i=q^i\ (i=1,2,\cdots,n)$,

由 $q^n=2$ 得 $q=\sqrt[n]{2}$，此时，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=q^{i-1}(q-1)$,

取 $\xi_i=x_{i-1}=q^{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$,

则 $\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\cdot\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{i-1}}\cdot q^{i-1}(q-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 2$，所以 $\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln 2$。

5.4.2 定积分的性质

1. 定积分与积分变量无关，即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$；证明略。

2. 规定，当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，故 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$；

3. $\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 k 为常数;

4. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

定积分的性质 3，4 称为定积分的线性性质，

显然，应设 $f(x),g(x)\in R[a,b]$，由定积分定义易证，略。

5. 定积分的区间可加性

设 $f \in R[a,b], \forall c \in (a,b)$, 有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$;

证明时注意：应该讨论 c 是否是 $[a,b]$ 区间的分割点，略。

6. 若 $\forall x \in [a,b], f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

特别，$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$;　证明略。

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值、最小值分别为 M,m, 则

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$;　证明略。

8. 定积分中值定理

定理2：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，

使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a)$ 。

证明：由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\exists m,M$，

使得 $m\le f(x)\le M, \forall x\in[a,b]$，由性质7可得

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a)；\text{故 } m\le\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}\le M$$

由介值定理可得 $\exists\xi\in[a,b], f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$，证毕。

通常把 $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$ 称为连续函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上的平均值。

9. 定积分第二中值定理

定理3：设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\forall x\in[a,b], g(x)\geq 0$,

证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 。

证明：由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\exists m,M$，使得

$$m\leq f(x)\leq M, \forall x\in[a,b],$$

故 $m\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\leq M\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

由介值定理可得 $\exists\xi\in[a,b], f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$，证毕。

5.5 定积分的计算

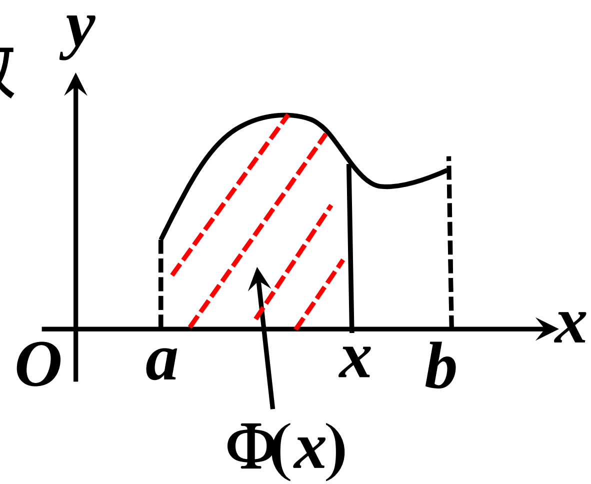
5.5.1 变上限函数及其导数

1. 变上限函数

定义：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则称函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\,(x\in[a,b])$$ 为函数 $f(x)$ 在

$[a,b]$ 上的变上限函数。



2. 变上限函数的导数

定理4： 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,(x\in[a,b])$$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$。

证明： $$\Delta\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以由积分中值定理得

$\Delta\Phi(x)=f(\xi)\cdot\Delta x$，其中 ξ 介于 $x,x+\Delta x$ 之间，

由导数定义得：$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)$，证毕。

【例题3】求变上限函数 $\Phi(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$ 的导数 $\Phi'(x)$。

解：$\Phi'(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$。

【例题4】求函数 $y=\int_1^{x^2}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：先介绍一般计算方法，设 $\Phi(u)=\int_a^u f(t)\mathrm{d}t, u=\varphi(x)$，

则复合函数 $y=\Phi(u)=\Phi[\varphi(x)]=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t$ 的导数为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\Phi'(u)\cdot\varphi'(x)=f(u)\cdot\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x),$$

因此，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}\cdot 2x=2\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$。

【例题5】求函数 $y=\int_{x^2}^{x^3}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：一般形式为：$y=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\mathrm{d}t$，计算导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

直接给计算公式：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)-f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$。

因此，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln(x^3)}{1+x^3}\cdot 3x^2-\frac{\ln(x^2)}{1+x^2}\cdot 2x$。

注意：变上限复合函数的导数的求导结构。

【例题6】求函数 $y=\int_0^x (x-t)e^{-t^2}\,dt$ 的导数。

解：注意：不能直接求导数！

$$y=\int_a^x x\cdot e^{-t^2}\,dt-\int_a^x t\cdot e^{-t^2}\,dt=x\cdot\int_a^x e^{-t^2}\,dt-\int_a^x t\cdot e^{-t^2}\,dt$$

因此， $y'=\int_a^x e^{-t^2}\,dt+x\cdot e^{-x^2}-x\cdot e^{-x^2}=\int_a^x e^{-t^2}\,dt$。

【例题7】设函数 $f(x)$ 在 $[-c,c]$ 上连续，且

$F(x)=\int_{-c}^{c}|x-t|f(t)\,dt\ (x\in[-c,c])$，求 $F''(x)$。

【例题7】解：

$$F(x)=\int_{-c}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{c}(t-x)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=x\cdot\int_{-c}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{-c}^{x}t\cdot f(t)\mathrm{d}t+\int_{x}^{c}t\cdot f(t)\mathrm{d}t-x\cdot\int_{x}^{c}f(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=\int_{-c}^{x}f(t)\mathrm{d}t+x\cdot f(x)-x\cdot f(x)-x\cdot f(x)-\int_{x}^{c}f(t)\mathrm{d}t+x\cdot f(x)$$

$$=\int_{-c}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{c}f(t)\mathrm{d}t$$

所以：$F''(x)=2f(x)$。

5.5.2 微积分基本公式

- 牛顿-莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式

当函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，由定理4可知，

变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的导数 $\Phi'(x)=f(x)$，

这说明变上限函数 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，

设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$\Phi(x)=F(x)+C$，其中 C 是一个常数，而 $\Phi(a)=0\Rightarrow C=-F(a)$，

所以 $\Phi(b)=F(b)-F(a)$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$。

- 微积分基本定理

定理5：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)\cdots\cdots\cdots(*)$$

公式 (*) 称为牛顿-莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式

公式 (*) 又称为微积分基本公式。

牛顿-莱布尼兹公式给出了定积分与不定积分的直接关系，

把定积分的计算转换为利用不定积分求原函数的问题。

【例题8】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\le 1\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>1\end{cases}$，计算 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。

解：$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1+\frac{1}{6}x^3\Big|_1^2=\frac{\pi}{4}+\frac{7}{6}$。

【例题9】计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$。

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=2(\sqrt{2}-1)$。

立志成才报国裕民

定积分定义是 n 项和式的极限，求和式极限比较困难，利用不定积分来求定积分方便很多，现在考虑另一个问题，如何利用定积分定义计算和式的极限，下面举例说明

【例题10】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$。

解：所求极限即为求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}\cdot\frac{1}{n}$，

设函数 $f(x)=\sqrt{1+\cos x\pi}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1+\cos x\pi}\,\mathrm{d}x$

而 $\int_0^1\sqrt{1+\cos x\pi}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\pi\right|\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$，故极限为 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$。

- 为了应用方便，简化定积分定义，常用公式为：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x。$$

【例题11】求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$。

解：为了直接应用公式方便，分两部分求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{2+x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1+\ln(2+x)\Big|_0^1=\ln 3。$$

5.5.3 定积分的换元积分法

定理6：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单值且具有连续导数，当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

上式称为定积分的换元积分公式。

注意：1. 定积分换元积分法不分第一类、第二类；

2. 定积分换元积分法在作变量代换时，

需要同时改变积分上、下限，但不需要代回原变量。

【例题12】 计算 $I=\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解：设 $\sqrt{x}=t, x=t^2$，则当 $x=1,4$ 时 $t=1,2$

故 $I=\int_1^2 \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\ln(1+t)\Big|_1^2=2\ln\frac{3}{2}$。

【例题13】 计算 $I=\int_0^4 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解：$I=\int_0^4 \sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^4 \sqrt{4-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$

设 $x=2+2\sin t$，则当 $x=0,4$ 时 $t=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\cos t|\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=2\pi$，问题：有简单方法吗?

【例题14】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x。$$

证明：设 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则当 $x=0,\frac{\pi}{2}$ 时，$t=\frac{\pi}{2},0,$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)\cdot(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{d}t$

由定积分变量无关性可得：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$，证毕。

思考题：设 p 为常数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}\,\mathrm{d}x=?$

【例题15】证明：

(1) 若函数 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上连续的偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

(2) 若函数 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上连续的奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0。$$

证明：$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

设 $x=-t$，则 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$

故 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x$，由函数的奇、偶性直接可证得。

常用结论：$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x$。

【例题16】设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以 T 为周期的连续函数，

证明：$\forall a\in\mathbf{R}$，有 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$。

证明：$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$

设 $x=T+t$，则 $\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(T+t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

故 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$，证毕。

【例题17】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x。$$

【例题17】证明:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

设 $x=\pi-t$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(\sin t)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\mathrm{d}x$$

故 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，证毕。

5.5.4 定积分的分部积分法

定理6：设函数$u(x),v(x)$的导函数$u'(x),v'(x)$在$[a,b]$上可积，

则 $$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x$$

上式称为定积分的分部积分公式。

【例题18】计算 $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,\mathrm{d}x$。

解：$I = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)\,\mathrm{d}x + \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$

$$= -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_1^e = 2 - \frac{2}{e}。$$

【例题19】计算 $I=\int_1^5 \mathrm{e}^{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$。

解：设 $\sqrt{x-1}=t, x=1+t^2$，则

$$I=\int_0^2 \mathrm{e}^t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int_0^2 t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=2t\cdot\mathrm{e}^t\Big|_0^2-2\int_0^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^2+2。$$

【例题20】计算 $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(1-x)^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解：$$I=2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(-2x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=4\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-4\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-2。$$

注：如果设 $\arcsin x=t, x=\sin t$，同样可得。

【例题21】计算 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\arctan e^{x}\,\mathrm{d}x$。

解：利用结论 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$。

得 $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\,\mathrm{d}x$。

注意：$\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=\dfrac{\pi}{2}$，

所以：$I=\dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$。

【例题22】计算 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解：注意：此题不能直接用不定积分计算 $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，

尝试换元，设 $x=\tan t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin t+\cos t)\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)\mathrm{d}t$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin t+\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[\sqrt{2}\cdot\sin(t+\frac{\pi}{4})]\mathrm{d}t=\frac{\ln 2}{8}\cdot\pi+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(t+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t$

设 $t=\frac{\pi}{4}-u$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(t+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\cos u\cdot(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,\mathrm{d}u$

因此，$I=\frac{\ln 2}{8}\cdot\pi$。

【例题23】

证明：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数,}\end{cases}$

解：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

所以 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$，由 $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $I_{2k}=\dfrac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\cdots=\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}I_0=\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$，

由 $I_1=1$ 得 $I_{2k+1}=\dfrac{2k}{2k+1}I_{2k-1}=\cdots=\dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}I_1=\dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$，

又由例题14结论直接可得：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢　谢！