高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第五章 积分学

5.2 不定积分的计算法

我们已经由基本导数表得到了基本积分公式，利用复合函数的导数引入了两类换元积分法，得到了一些常用积分公式。

但是，对于一些基本初等函数的积分如：$\int \ln x \, \mathrm{d}x, \int \arcsin x \, \mathrm{d}x$ 等仍然无法解决，下面我们利用两个函数乘积的导数的计算公式引入新的积分方法---分部积分法。

5.2.2. 分部积分法

由于 $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$，而 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+c$，

所以：$\int[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)]\mathrm{d}x=\int[u(x)\cdot v(x)]'\mathrm{d}x=u(x)\cdot v(x)+c$。

定理3：设函数 $u(x),v(x)$ 在区间 I 上可导，如果积分

$\int u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\int u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x\cdots\cdots\cdots(*)$$

(*) 式称为分部积分公式。

- 分部积分公式可简写为：$\int u\mathrm{d}v=u\cdot v-\int v\mathrm{d}u$，

- 分部积分法表明可以利用积分 $\int v\,\mathrm{d}u$ 来计算积分 $\int u\,\mathrm{d}v$。

【例题1】计算不定积分：$I=\int \ln x\,\mathrm{d}x$。

解：取 $u=\ln x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，则 $v=x,\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，且

$$I=\ln x\cdot x-\int x\,\mathrm{d}(\ln x)=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+c。$$

【例题2】计算不定积分：$I=\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$。

解：取 $u=\arcsin x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x, v=x$，则

$$I=\arcsin x\cdot x-\int x\,\mathrm{d}(\arcsin x)=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c。$$

【例题3】计算不定积分：$I=\int \arctan x\,\mathrm{d}x$。

解：取 $u=\arctan x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x, v=x$，则

$$I=\arctan x\cdot x-\int x\,\mathrm{d}(\arctan x)=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c。$$

【例题4】计算不定积分：$I=\int x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$。

解：如果取 $u=x\cdot\mathrm{e}^{-x},\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x, v=x$，则

$$I=x\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot x-\int x\,\mathrm{d}(x\cdot\mathrm{e}^{-x})=x\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot x-\int x\cdot(1-x)\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

比原来积分更加复杂，问题：怎么办?

【例题4】解：如果取 $u=e^{-x}, dv=x\cdot dx, v=\frac{1}{2}x^2$，则

$$I=\int e^{-x} d(\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}-\int\frac{1}{2}x^2\cdot(-1)e^{-x}dx$$，也比原积分复杂，

所以应该取 $u=x, dv=e^{-x}dx, v=-e^{-x}$，则

$$I=-\int x d(e^{-x})=-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx=-(x+1)\cdot e^{-x}+c$$。

注意：分部积分的关键是：如何选取 u, dv？

如果把凑微分 $v'(x)dx=d[v(x)]$ 形象化比喻为"吃"进入微分号，

即把 $v'(x)$"吃入"dx，那么分部积分的关键问题是"吃什么？"

【例题5】计算不定积分：$I=\int x\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x$。

解："吃什么？" 取 $u=x,\ \mathrm{d}v=\cos 3x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\frac{1}{3}\sin 3x)$，

$$I=\int x\,\mathrm{d}(\frac{1}{3}\sin 3x)=x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+c。$$

【例题6】计算不定积分：$I=\int\sin\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$。

解：令 $\sqrt[3]{x}=t,\ x=t^3$，则 $\mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t$，

$$I=\int\sin t\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t=-3\int t^2\,\mathrm{d}(\cos t)=-3t^2\cos t+3\int\cos t\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$=-3t^2\cos t+6\int t\,\mathrm{d}(\sin t)=-3t^2\cos t+6t\sin t-6\int\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=-3t^2\cos t+6t\sin t+6\cos t+c，\quad 其中\ t=\sqrt[3]{x}。$$

【例题7】计算不定积分：$I=\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$。

解："吃什么？"

$$I=\int \ln x\,\mathrm{d}(\frac{1}{4}x^4)=\frac{1}{4}x^4\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\cdot\ln x-\frac{1}{16}x^4+c。$$

【例题8】计算不定积分：$I=\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$。

解：$I=\int \arctan x\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+c。$$

【例题9】计算不定积分：$I_1=\int e^x\cos x\,dx, I_2=\int e^x\sin x\,dx$。

解：$I_1=\int\cos x\,d(e^x)=e^x\cdot\cos x+\int e^x\cdot\sin x\,dx=e^x\cdot\cos x+I_2,$

$I_2=\int\sin x\,d(e^x)=e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\cos x\,dx=e^x\cdot\sin x-I_1,$

所以 $I_1=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+c,\ I_2=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$。

同理，可计算积分：$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx, I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$。

注意：如果应用欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$

则有：$e^{(a+bi)x}=e^{ax}\cdot(\cos bx+i\sin bx)$，可在复数下计算积分。

【例题10】计算不定积分：$I=\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$。

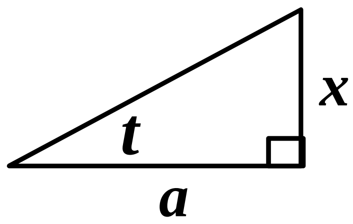
解：$I=\int \sec x\,\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\cdot\tan x-\int \tan^2 x\cdot\sec x\,\mathrm{d}x$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x+\int \sec x\,\mathrm{d}x=\sec x\cdot\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|$$

所以 $I=\dfrac{1}{2}\sec x\cdot\tan x+\dfrac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+c$。

【例题11】计算不定积分：$I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解法1：令 $x=a\tan t$，则 $\tan t=\dfrac{x}{a},\sec t=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，



$$I=a^2\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\sec t\cdot\tan t+\frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\tan t|+c_1$$

故 $I=\dfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$。

【例题11】解法2：

$$I=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

所以 $I=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c。$$

利用类似方法可得：

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c。$$

【例题12】计算不定积分：$I=\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$。

解：$I=\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\cos x}\cdot \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\cdot \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{1}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}\cdot \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}\cdot \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}+\int \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\cdot\tan\frac{x}{2}+c\text{。}$$

注意：分部积分公式的变型 $\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u=u\cdot v+c$。

这种方法简称：拆项、相消。

【例题13】计算不定积分：$I=\int\frac{x\cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$。

解：$I=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\arctan x}\,d\arctan x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x})$

$$=e^{\arctan x}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\int e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

又 $I=-\int e^{\arctan x}d\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\arctan x}+\int e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

故 $I=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\arctan x}+c$。

【例题14】计算：$I_n=\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$，其中 n为正整数。

解：$I_n=-\int \sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+\int\cos^2 x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

所以：$I_n=-\dfrac{1}{n}\sin^{n-1}x\cdot\cos x+\dfrac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$

其中：$I_0=x+c,I_1=-\cos x+c$

【例题15】计算：$J_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\,(a>0)$，其中 n 为正整数。

解：$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\cdot(-n)\frac{2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$

$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n(J_n-a^2J_{n+1})$

所以：$J_{n+1}=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n$，

其中：$J_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$。

- 阶段小结：分部积分公式 $\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u$,

  或 $\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$

  关键是：如何选取 $u, \mathrm{d}v$？优先选择"吃什么？"

1：对于积分 $\int x^n\cdot e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int x^n\,\mathrm{d}(e^{ax})$;

2：对于积分 $\int x^n\cdot \cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int x^n\,\mathrm{d}(\sin bx)$;

$$\int x^n\cdot \sin bx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\int x^n\,\mathrm{d}(\cos bx);$$

指数函数和三角函数是第一优先的，

注意：需要进行 n 次分部积分！

3：对于积分 $\int x^{\mu}\cdot\ln x\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{\mu+1}\int\ln x\,\mathrm{d}(x^{\mu+1})$;

4：对于积分 $\int x^{\mu}\cdot\arcsin x\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{\mu+1}\int\arcsin x\,\mathrm{d}(x^{\mu+1})$;

$$\int x^{\mu}\cdot\arctan x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\mu+1}\int\arctan x\,\mathrm{d}(x^{\mu+1});$$

幂函数是第二优先的，对数函数与反三角函数放最后。

5：对于积分 $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x, \int e^{ax}\cdot\sin bx\,\mathrm{d}x, \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x, \int\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x$,

需要两次分部积分后进行移项计算。

6：分部积分公式变型 $\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u=u\cdot v+c$ 的应用，

拆项、相消。

5.3 有理函数的积分

在微分学中，任何初等函数的导数仍然是初等函数，

但在积分学中不同，一些简单的初等函数如：$e^{x^2}, \dfrac{\sin x}{x}$ 等，

没有初等形式的原函数，或者说“积不出”。

问题：什么样的函数是“可积分的”呢？

本节将说明任何有理函数的积分必是初等函数或是“可积分的”。

5.3.1. 有理函数

形如：$R(x)=\dfrac{N(x)}{Q(x)}=\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}$

的函数称为有理函数，其中 $a_i,b_j\,(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)\in\mathrm{R}$

m,n 为正整数，假定 $N(x),Q(x)$ 没有公因式。

由多项式除法可知：$R(x)=M(x)+\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，

其中：$M(x)$ 为多项式，$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为真分式。

- 有理函数的积分问题主要是要解决真分式的积分。

5.3.2. 部分分式

借用代数学知识，任何 n 次方程在复数域内都有 n 个根，且复数根成对出现。

如果 $x=a$ 是方程 $F(x)=0$ 的根，则有 $F(x)=(x-a)G(x)$，

如果 $x=\alpha\pm\beta i$ 是方程 $F(x)=0$ 的根，则有 $F(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\cdot H(x)$，

假定 $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

则 $Q(x)=a_0(x-r_1)^{k_1}(x-r_2)^{k_2}\cdots(x-r_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$

其中：$p_k^2-4q_k<0\,(k=1,2,\cdots,j)$，且：$k_1+k_2+\cdots+k_i+2(l_1+l_2+\cdots+l_j)=n$。

1. 当 $\dfrac{P(x)}{(x-a)^m}$ 为真方式时，可如下部分方式

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$

其中：$A_k\ (k=1,2,\cdots,m)$ 为待定系数。（初等方法或泰勒公式）

2. 当 $\dfrac{P(x)}{(x^2+px+q)^m}(p^2-4q<0)$ 为真方式时，可如下部分方式

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(x^2+px+q)^m}$$

其中：$A_k, B_k\ (k=1,2,\cdots,m)$ 为待定系数。

【例题16】将函数 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ 部分分式。

解：设 $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$,

则：$x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$

为了简化运算，可先考虑特殊值时的情况，

由 $x=0$ 得 $1=-A$, 由 $x=1$ 得 $2=D$,

比较 x^3 的系数得 $1=A+B$, 比较 x 的系数得 $0=3A+B-C+D$,

所以 $B=2$, $C=1$, 故 $A=-1, B=2, C=1, D=2$。

【例题17】将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ 部分分式。

解：设 $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$,

如果直接通分后比较同次幂系数来求待定系数的值，计算量太大，通常找更加简单的方法来部分分式：

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

注意：上式就是最简单的形式了，即是我们需要的部分分式。

5.3.3. 有理函数的积分

任何有理函数的积分都可化为整式和真分式的积分，整式的积分已经解决，而真分式的积分可通过部分分式后化为下列四种形式的积分：

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a|+c,$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x\,(k>1) = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+c,$

立志成才 报国裕民

3. $$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\,(p^2-4q<0)=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c。$$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x \,(p^2-4q<0)$

$$=\frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

而 $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^n}\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})$

记 $x+\frac{p}{2}=u, \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}=a,$

则上述积分可由递推公式 $J_n=\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$（见例题15）计算解决。

【例题18】计算不定积分 $I=\int\frac{x^4+x^3+3x^2+2x+1}{x^3+x}\mathrm{d}x$。

解：由于

$$\frac{x^4+x^3+3x^2+2x+1}{x^3+x}=x+1+\frac{2x^2+x+1}{x^3+x}=x+1+\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

所以：$I=\int(x+1+\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1})\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+c$$。

【例题19】计算不定积分 $\int \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x, \int \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$。

解：由于 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，

所以由部分分式可得：$\frac{ax^2+bx+c}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

虽然两个积分都可以解决，但计算比较复杂，

寻求简单计算方法，考虑先计算 $\int \frac{1+x}{x^3+1}\mathrm{d}x, \int \frac{1-x}{x^3+1}\mathrm{d}x$，

而 $\int \frac{1+x}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$，

$\int \frac{1-x}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\int \frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{d}x=\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+c$，

则所求积分只需要加、减上述积分即可得到，略。

【思考题】如何计算积分 $\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x,\int\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$?

问题：x^4+1 可以分解因式吗?

提示：先计算 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x,\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x$。

【例题20】利用多种解法计算积分 $I=\int\frac{x^7}{(1-x^2)^5}\mathrm{d}x$。

解法1：部分分式：$\frac{x^7}{(1-x^2)^5}=\frac{A_1}{1-x}+\cdots+\frac{A_5}{(1-x)^5}+\frac{B_1}{1+x}+\cdots+\frac{B_5}{(1+x)^5}$

解法2：设 $x^2=t$，则 $I=\frac{1}{2}\int\frac{t^3}{(1-t)^5}\mathrm{d}t$，

部分分式：$\frac{t^3}{(1-t)^5}=\frac{C_1}{1-x}+\cdots+\frac{C_5}{(1-x)^5}$

解法3：设 $1-x^2=u$，则

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-u)^3}{u^5}\mathrm{d}u=(-\frac{1}{2})\int(\frac{1}{u^5}-\frac{3}{u^4}+\frac{3}{u^3}-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{8u^4}-\frac{1}{2u^3}+\frac{3}{4u^2}-\frac{1}{2u}+c,$$ 其中 $u=1-x^2$。

【例题20】

解法4：设 $x=\frac{1}{t}$，则 $I=\int\frac{-t}{(t^2-1)^5}\mathrm{d}t=\frac{1}{8(t^2-1)^4}+c=\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+c$。

解法5：设 $x=\sin u$，则

$$I=\int\frac{\sin^7 u}{\cos^9 u}\mathrm{d}u=\int\tan^7 u\,\mathrm{d}\tan u=\frac{1}{8}\tan^8 u+c=\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+c。$$

5.3.4. 可化为有理函数的积分

1. 三角函数有理式的积分

三角函数有理式是指三角函数经过有限次四则运算所构成的函数，简记为：$R(\sin x, \cos x)$。

其中：$R(u,v)$ 表示 u,v 经过有限次四则运算后的表达式。

三角函数有理式的积分可表示为：$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$。

作万能代换 $\tan\dfrac{x}{2}=t$, 则 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$

- 三角函数有理式的积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int R_1(t)\mathrm{d}t$$

其中 $R_1(t)$ 是 t 的有理函数。

【例题21】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{4+3\sin x}\mathrm{d}x$。

解：设 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$I=\int\frac{1}{4+\frac{6t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2t^2+3t+2}\cdot\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{4t+3}{\sqrt{7}}+c,$$

其中 $t=\tan\frac{x}{2}$。

【例题22】计算不定积分：$I=\int\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$。

解法1：利用万能代换，设 $t=\tan\frac{x}{2}$，计算比较复杂，略。

寻求简单一些的方法

解法2：$I=\int\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\cdot\mathrm{d}t=\int(\sec^2 x+2\tan x\cdot\sec x+\tan^2 x)\mathrm{d}t$

$=2\tan x+2\sec x-x+c$。

解法3：$I=\int\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\cdot\mathrm{d}x=\int\cot^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\cdot\mathrm{d}x=2\cot(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})-x+c$

2. 简单无理函数的积分

【例题23】计算不定积分：$I=\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$。

解法1：设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=u$，则 $x=\frac{1}{u^2-1}$，

$$I=\int (u^2-1)\cdot u\cdot\frac{-2u}{(u^2-1)^2}\cdot\mathrm{d}u=-2u-\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c,$$ 其中 $u=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$。

解法2：设 $x=\tan^2 t$，则

$$I=\int \frac{1}{\tan^2 t}\cdot\frac{\sec t}{\tan t}\cdot 2\tan t\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=2\int \frac{1}{\sin^2 t\cdot\cos t}\mathrm{d}t=2\int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=2\ln|\sec t+\tan t|-2\csc t+c,$$ 其中 $t=\arctan\sqrt{x}$。

【例题24】计算不定积分：$I=\int\frac{x}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+2}}\mathrm{d}x$。

解：设 $x-1=t$，则

$$I=\int\frac{t+1}{t\sqrt{t^2-2t-1}}\cdot\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\sqrt{t^2-2t-1}}\cdot\mathrm{d}t+\int\frac{1}{t\sqrt{t^2-2t-1}}\cdot\mathrm{d}t=I_1+I_2$$

而 $I_1=\int\frac{1}{\sqrt{(t-1)^2-2}}\cdot\mathrm{d}(t-1)=\ln|(t-1)+\sqrt{t^2-2t-1}|+c$，

设 $t=\frac{1}{u}$，则 $I_2=-\int\frac{1}{\sqrt{1-2u-u^2}}\mathrm{d}u=-\int\frac{1}{\sqrt{2-(u+1)^2}}\mathrm{d}(u+1)=-\arcsin\frac{u+1}{\sqrt{2}}+c$，

因此：$I=I_1+I_2=\ln|t-1+\sqrt{t^2-2t-1}|-\arcsin\frac{u+1}{\sqrt{2}}+c$，其中 $u=\frac{1}{t}$，$t=x-1$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢　谢！