高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

上海科技大学 ShanghaiTech University

第五章 积分学

微积分主要是研究微分学和积分学。

本章开始我们要研究微积分的另一个基本内容即积分学。

许多实际问题需要用积分学来解决，我们将逐步引入定积分的定义、性质、计算方法及其应用，由于积分学的主要基础是不定积分，为此，我们先介绍不定积分。

立志成才报国裕民

5.1 不定积分的概念

5.1.1. 原函数与不定积分

由导数计算可知，$(\sin x)' = \cos x$，现在将问题反转，什么函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = \cos x$? 这个函数一定是 $F(x) = \sin x$ 吗?

如果 $F'(x) = \cos^2 x$，那么 $F(x) = ?$

这都是不定积分要解决的问题，我们首先引入原函数的概念。

1. 原函数

已知函数 $f(x)$ 是定义在某个区间 I 上的函数，如果存在函数 $F(x)$ 使得在该区间内任意一点 x 处均有 $F'(x)=f(x)$，则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数。

- 若函数 $F(x),G(x)$ 都是函数 $f(x)$ 的原函数，则有：

$G(x)=F(x)+c$，其中 c 为常数。

2. 不定积分

函数 $f(x)$ 的全体原函数称为函数 $f(x)$ 的不定积分，

记作：$\int f(x)\mathrm{d}x$。

其中：$\int$ 为积分符号，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量。

若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$，其中 c 为任意常数。

5.1.2. 不定积分的性质

1. 运算性质（线性性质）

(1) $\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 k 为常数;

(2) $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$;

2. 关系（不定积分与导数、微分的关系）

(1) $[\int f(x)\,\mathrm{d}x]' = f(x), \mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+c, \int \mathrm{d}f(x) = f(x)+c$;

5.1.3. 基本积分公式

由基本导数表可直接得到下列基本积分表:

(1) $\int x^{\mu}\,dx\ (\mu\neq-1)=\dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+c$; (2) $\int \dfrac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c$;

(3) $\int a^{x}\,dx=\dfrac{1}{\ln a}a^{x}+c$; (4) $\int e^{x}\,dx=e^{x}+c$;

(5) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$; (6) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$;

(7) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$; (8) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+c$;

(9) $\int \sec x\cdot\tan x\,dx=\sec x+c$; (10) $\int \csc x\cdot\cot x\,dx=-\csc x+c$;

(11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+c$; (12) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+c$;

【例题1】计算不定积分：$I=\int\frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$。

解：原式 $I=\int[x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+c$。

【例题2】计算不定积分：$I=\int\frac{1+x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解：原式 $I=\int[x^2-1+\frac{2}{1+x^2}]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+c$。

【例题3】计算不定积分：$I=\int[3^x-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\tan^2 x]\mathrm{d}x$。

解：原式 $I=\int[3^x-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\sec^2 x-1]\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^x-2\arcsin x+\tan x-x+c$。

5.2 不定积分的计算法

5.2.1. 换元积分法

直接利用基本积分公式计算不定积分只能解决少数问题，不定积分的计算方法主要有换元积分法和分部积分法。

我们先通过例题来了解不定积分的换元积分法。

【例题4】计算不定积分：$I=\int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$。

解法1： 直接计算，由导数计算可知，$(\sin 2x)'=2\cos 2x$，

所以 $I=\int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x=\sin(2x)+c$。

$I=\int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$。

解法2：换元，令 $2x=u$，则 $2\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，

所以 $I=\int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x=\int \cos u\,\mathrm{d}u=\sin u+c$，

代回原变量，得 $I=\int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x=\sin(2x)+c$。

解法3：凑微分，$I=\int \cos(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\sin(2x)+c$，

解法3称为凑微分法，相当于作形式上换元。

【例题5】计算不定积分：$I=\int\cos(1-2x)\,\mathrm{d}x$。

解法1： 换元，令 $1-2x=u$， 则 $-2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，

所以 $I=\int\cos(1-2x)\,\mathrm{d}x=\int\cos u\cdot(-\frac{1}{2}\mathrm{d}u)=(-\frac{1}{2})\sin u+c$，

代回原变量，得 $I=\int\cos(1-2x)\,\mathrm{d}x=(-\frac{1}{2})\sin(1-2x)+c$。

解法2：凑微分，$I=\int\cos(1-2x)(-\frac{1}{2})\mathrm{d}(1-2x)=(-\frac{1}{2})\sin(1-2x)+c$。

【例题6】计算不定积分：$I=\int 2x\cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x$。

解：直接利用凑微分，$I=\int e^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2)=e^{x^2}+c$。

1. 第一类换元积分法

定理1. 如果 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+c$，则

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}[\varphi(x)]=F[\varphi(x)]+c,$$

这种令 $\varphi(x)=u$ 的变量代换的积分方法称为第一类换元积分法，

常称为“凑微分法”。

证明：直接由复合函数的导数可得到，略。

【例题7】计算不定积分：$I=\int\cot x\,\mathrm{d}x$。

解：积分 $I=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}(\sin x)=\ln|\sin x|+c$。

【例题8】计算不定积分：$I=\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

解：$I=2\int\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sin\sqrt{x}+c$。

【例题9】计算不定积分：$I=\int(2x-3)^3\,\mathrm{d}x$。

解：直接计算 $I=\int(8x^3-36x^2+54x-27)\,\mathrm{d}x$ 略。

凑微分，$I=\frac{1}{2}\int(2x-3)^3\,\mathrm{d}(2x-3)=\frac{1}{8}(2x-3)^4+c$。

【例题10】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$。

解：$I=\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\mathrm{d}(\frac{x}{2})=\arcsin\frac{x}{2}+c$。

- 常用积分公式：$I=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)=\arcsin\frac{x}{a}+c$。

【例题11】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{9+x^2}\mathrm{d}x$。

解：$I=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}\mathrm{d}(\frac{x}{3})=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c$。

- 常用积分公式：$I=\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\,(a>0)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$。

【例题12】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解：$I=\frac{1}{2a}\int(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}[\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a)-\int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)]$

$=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+c$。

- 常用积分公式：$I=\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\,(a\neq 0)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$。

【例题13】计算不定积分：$I=\int\sec x\,\mathrm{d}x$。

解：
$$I=\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right|+c=\ln|\sec x+\tan x|+c。$$

常用积分公式：$I=\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+c$，

同理得：$I=\int\csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+c$。

2. 第二类换元积分法

定理2. 设函数 $x=\varphi(t)$ 单调且连续可导，如果

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=F[t]+c,\ \text{则}\ \int f(x)\,\mathrm{d}x=F[\varphi^{-1}(x)]+c,$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数，这种令 $x=\varphi(t)$

的变量代换的积分方法称为第二类换元积分法，证明：略。

【例题14】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$。

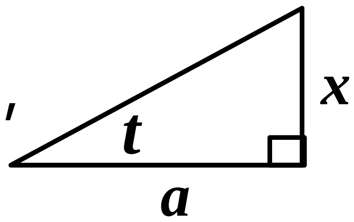
解：令 $x=t^6$，则 $I=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t=6\cdot\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\cdot\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})\mathrm{d}t$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c,\ \text{其中}\ t=\sqrt[6]{x}。$$

立志成才 报国裕民

【例题15】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解：作三角代换，令 $x=a\tan t$，作辅助三角形，



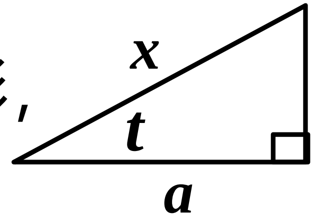
则 $\tan t=\frac{x}{a},\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$,

故 $I=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+c_1$,

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+c_1=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c。$$

【例题16】计算不定积分：$I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解：作三角代换，令 $x=a\sec t$，作辅助三角形，



则 $\sec t=\frac{x}{a},\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，

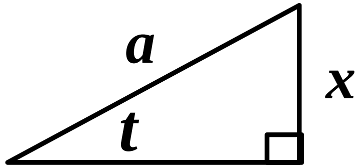
故 $I=\int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+c_1$，

$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$。

- 常用积分公式：$I=\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x\,(a\neq 0)=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c$。

【例题17】计算不定积分：$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$。

解：作三角代换，令 $x=a\sin t$，作辅助三角形，



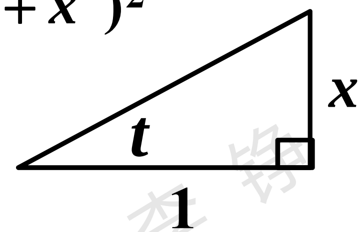
则 $\sin t=\dfrac{x}{a},\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，

故 $I=\int(a\cos t)^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{a^2}{2}t+\dfrac{a^2}{4}\sin 2t+c$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{a^2-x^2}+c\text{。}$$

【例题18】计算不定积分：$I=\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$。

解：令 $x=\tan t$，作辅助三角形，



则 $\tan t=x, \sec t=\sqrt{x^2+1}, \sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，

故 $I=\int \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\int(\sec t-\cos t)\,\mathrm{d}t$

$$=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+c=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$$。

【例题19】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{x(x^6+4)}\mathrm{d}x$。

解法1：$I=\int\frac{x^5}{x^6(x^6+4)}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^6(x^6+4)}\mathrm{d}(x^6)$

令 $x^6=u$，则 $I=\frac{1}{6}\int\frac{1}{u(u+4)}\mathrm{d}u$

$\nearrow =\frac{1}{24}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+4})\mathrm{d}u$

$\searrow =\frac{1}{6}\int\frac{1}{(u+2)^2-4}\mathrm{d}u$

以下略；

解法2：令 $x=\frac{1}{t}$，则 $I=\int\frac{t^7}{1+4t^6}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\frac{1}{24}\int\frac{1}{1+4t^6}\mathrm{d}(1+4t^6)$

$I=-\frac{1}{24}\ln|1+4t^6|+c$，其中 $t=\frac{1}{x}$。

注意：变量代换 $x=\frac{1}{t}$ 又称为倒代换，也是一种常用的变量代换。

【例题20】计算不定积分：$I=\int x\cdot\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\,\mathrm{d}x$。

解：作特殊三角代换，令 $x=4\sin^2 t$，

则 $I=\int 4\sin^2 t\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}\cdot 8\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=32\int \sin^4 t\,\mathrm{d}t$

$=8\int(1-\cos 2t)^2\,\mathrm{d}t=\int[8-16\cos 2t+4(1+\cos 4t)]\,\mathrm{d}t$

$=12t-8\sin 2t+\sin 4t+c$，

其中：$t=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$。

注意：可以直作变量代换 $\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}=u$。

【例题21】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{e^x+1}dx$。

解法1：$I=\int\frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx=\int(1-\frac{e^x}{e^x+1})dx=x-\ln|e^x+1|+c$;

解法2：$I=\int\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx=\int\frac{1}{e^x(e^x+1)}d(e^x)\overset{e^x=u}{=}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1})du=\ln|\frac{u}{u+1}|+c$;

解法3：$I=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int\frac{1}{1+e^{-x}}d(1+e^{-x})=-\ln|1+e^{-x}|+c$;

解法4：令 $e^x+1=t$，则 $x=\ln(t-1)$, $dx=\frac{1}{t-1}dt$

$$I=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}dt=\ln|\frac{t-1}{t}|+c=\ln|\frac{e^x}{e^x+1}|+c。$$

【例题22】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$。

解法1：$I=\int\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1+e^{-x}}}dx=-2\int\frac{1}{\sqrt{1+(e^{-\frac{1}{2}x})^2}}d(e^{-\frac{1}{2}x})$

$$=-2\ln|e^{-\frac{1}{2}x}+\sqrt{1+e^{-x}}|+c。$$

解法2：令 $\sqrt{e^x+1}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

$$I=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c。$$

【例题23】计算不定积分：$I=\int\sqrt{e^x+1}\,dx$。

解：令 $\sqrt{e^x+1}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$, $dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt$

$$I=\int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c,$$

其中 $t=\sqrt{e^x+1}$。

【例题24】计算不定积分：$I=\int\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx$。

解法1：$x^2+4x+7=(x+2)^2+3$，令 $x+2=\sqrt{3}\tan t$，

则 $I=\int\frac{3\sqrt{3}\tan t-5}{\sqrt{3}\sec t}\cdot\sqrt{3}\sec^2 t\,dt=3\sqrt{3}\sec t-5\ln|\sec t+\tan t|+c$，

其中 $t=\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}}$。

解法2：

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}\cdot(2x+4)-5}{\sqrt{x^2+4x+7}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+7}}d(x^2+4x+7)-5\int\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+3}}d(x+2)$$

则 $I=3\sqrt{x^2+4x+7}-5\ln|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+7}|+c$。

- 思考题：如何计算不定积分：$I=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$。

【例题25】计算不定积分：$I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4x-1}}\mathrm{d}x$。

解法1：$x^2-4x-1=(x-2)^2-5$，令 $x-2=\sqrt{5}\sec t$， 以下略；

解法2：令 $x=\frac{1}{t}$，则 $I=\int\frac{t^2}{\sqrt{1-4t-t^2}}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\sqrt{5-(t+2)^2}}\mathrm{d}(t+2)$

$$I=-\arcsin\frac{t+2}{\sqrt{5}}+c=-\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}\cdot x}+c。$$

- 思考题：如何计算不定积分：$I=\int\frac{Ax+B}{(x-1)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$。

【例题26】计算不定积分：$I=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$。

解法1：作万能代换，令 $\tan\frac{x}{2}=t$，以后介绍，此处略。

解法2：

$$I=\int \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int[\cot(x+\frac{\pi}{4})+1]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|\sin(x+\frac{\pi}{4})|+\frac{1}{2}x+c,$$

解法3：$I=\frac{1}{2}\int \frac{(\cos x+\sin x)+(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+c。$$

3. 常用积分公式

(13) $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$; (14) $\int \cot\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$;

(15) $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + c$; (16) $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + c$;

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x (a>0) = \arcsin\frac{x}{a} + c$; (18) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x (a>0) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$;

(19) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x (a>0) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$; (20) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！