高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

4.5 曲线的曲率与方程的近似解

我们已经讨论了曲线的单调性、凹凸性，但是当曲线的单调性相同且凸向相同时，曲线的图形仍然有很大的差别，如

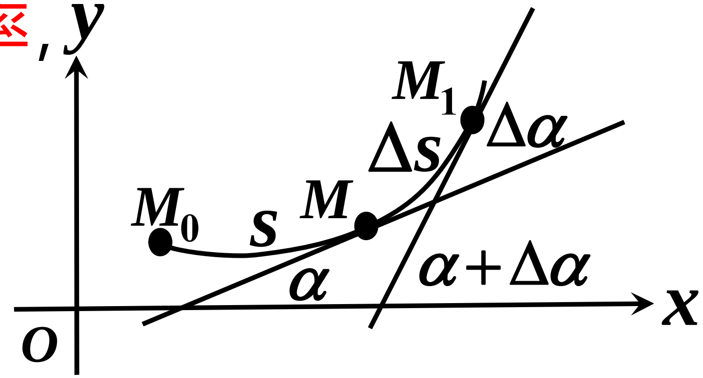
进一步，我们需要讨论如何用数量来描述曲线的弯曲程度，介绍曲线的曲率及其计算。

4.5.1 曲线的曲率

设曲线 C 具有连续转动的切线，在 C 上选定一点 M_0 作为度量曲线弧长 s 的基点，设点 M 对应的弧长为 s，切线的倾角为 α，点 M_1 对应的弧长为 $s+\Delta s$，切线的倾角 $\alpha+\Delta\alpha$，当点 M 沿曲线 C 转动到点 M_1 时切线的转角为 $\Delta\alpha$，弧段 $\overline{MM_1}$ 的长度为 Δs，

把比值 $\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 称为弧段 $\overline{MM_1}$ 的平均曲率，(即单位弧段上切线转角的大小)，

记作：$\overline{K}$，即 $\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$。



1. 曲线的曲率

当 $\Delta s \to 0$ 时，$\overline{K}$ 的极限称为曲线 C 在点 M 处的曲率，记作：K，即：$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，如果极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在，则

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|。$$

2. 曲线的弧长

设平面曲线弧段 $\overline{AB}$ 的方程为：$y=f(x)\,(a\le x\le b)$，其中 $f\in C^{(1)}[a,b]$，则弧段 $\overline{AB}$ 是可求长的，且其弧长为：

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx。$$

注：我们将在下一章中完整介绍。

- 弧微分

把 $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ 称为弧微分，记作：$\mathrm{d}s$，

即：$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$。

- 曲率的计算

设曲线 C 的方程为：$y=f(x)$ 具有二阶导数，则

$y'=\tan\alpha, y''=\sec^2\alpha\cdot\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=(1+\tan^2\alpha)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$，所以 $\mathrm{d}\alpha=\dfrac{y''}{1+(y')^2}\mathrm{d}x$，

又由弧微分知：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$，

故曲线 C 在点 M 处曲率的计算公式为：$K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$。

【例题1】求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上曲率最大的点。

解：由 $y'=2ax+b, y''=2a$，得：$K=\dfrac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}$

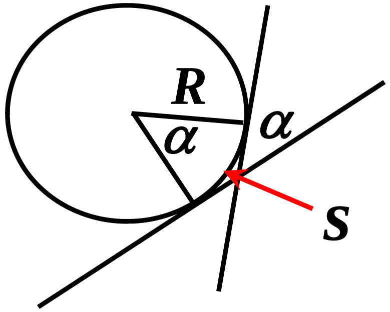
所以，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，曲率 K 最大，

即在抛物线顶点处的曲率最大。

【例题2】证明：圆上任意一点的曲率相等，且等于半径的倒数。

证明：设圆半径为 R, 弧长为 $s=R\cdot\alpha$,

由曲率的定义知，$K=\dfrac{\alpha}{s}=\dfrac{1}{R}$，证毕。



注意：直线不弯曲，每一点曲率为零，直线可看成半径为无穷大的圆。

- 参数方程表示的曲线的曲率

设曲线 C 的方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$,

其中函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 具有二阶导数，求曲线 C 在任意点 M 处曲率。

由于 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$,

所以，曲率为：$K=\dfrac{|\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$。

注意：此时弧微分为 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(x)}\,dt$。

【例题3】求摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$上任意一点处的曲率。

解：由 $x'(t)=a(1-\cos t), x''(t)=a\sin t, y'(t)=a\sin t, y''(t)=a\cos t$,

得：$$K=\frac{|a\cos t\cdot a(1-\cos t)-a\sin t\cdot a\sin t|}{[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1-\cos t}{a\cdot(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}。$$

- 极坐标表示的曲线的曲率

设曲线 C 的方程为：$r=r(\theta)\,(\alpha\le\theta\le\beta)$，

其中函数 $r(\theta)$ 具有二阶导数，求曲线 C 上任意点 M 处曲率。

将极坐标方程化为参数方程 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}(\alpha\le\theta\le\beta)$，

可得曲率为：$K=\dfrac{|r^2(\theta)+2[r'(\theta)]^2-r(\theta)r''(\theta)|}{[r^2(\theta)+r'^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}$。

注意：此时弧微分为 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$。

【例题4】求Archimedes螺线 $r = a\theta\,(a>0)$ 上任意一点处的曲率。

解：先将曲线化为参数方程 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta = a\theta\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta = a\theta\sin\theta \end{cases} (\alpha \le \theta \le \beta)$,

由 $x'(\theta) = a\cos\theta - a\theta\sin\theta$, $y'(\theta) = a\sin\theta + a\theta\cos\theta$,

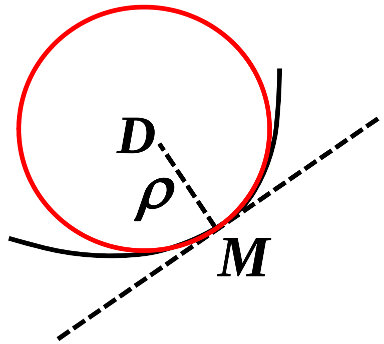
$x''(\theta) = -2a\sin\theta - a\theta\cos\theta$, $y''(\theta) = 2a\cos\theta - a\theta\sin\theta$,

得: $K = \dfrac{\theta^2+2}{a(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$

3. 曲率圆、曲率半径、曲率中心

设函数 $f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$, 在点 M 处曲线 $y=f(x)$ 的法线上向内凹的一侧取一点 D, 使得 $|DM|=\rho=\dfrac{1}{K}$,

以 D 为圆心, ρ 为半径，作圆，如图



称此圆为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率圆,

圆心 D 半径 ρ 分别称为曲线在点 $M(x,y)$ 的曲率中心和曲率半径。

注：曲线 C 与曲率圆在点 $M(x,y)$ 处切线、曲率、凸向都相同。

- 曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$,

  利用法线方程和曲率半径，可以得到

- 曲率中心 $D(\xi,\eta)$ 的坐标为：

$$\xi=x-\frac{y'\cdot[1+(y')^2]}{|y''|},\eta=y+\frac{1+(y')^2}{|y''|}。$$

4.5.2 方程的近似解

1. 二分法

2. 迭代法

3. 牛顿切线法

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！