上海科技大学
ShanghaiTech University

高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

4.4 利用导数研究函数的性态

4.4.1 函数的单调性判别法

当函数 $f(x)$ 可导时，函数的增减性与导数有很大的关系。

定理1：设函数在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，则

当 $\forall x\in(a,b), f'(x)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在(a,b) 内严格单调增加;

当 $\forall x\in(a,b), f'(x)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在(a,b) 内严格单调减少。

证明：由拉格朗日定理容易证得，略。

当$\forall x\in(a,b), f'(x)\geq 0(\leq 0)$ 时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(减少)。

- 进一步可以得到

定理2: 设函数在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加(或减少)的充分必要条件是:

$\forall x\in(a,b), f'(x)\geq 0$ (或 $f'(x)\leq 0$), 且在 (a,b) 的任何子区间内 $f'(x)$ 不恒等于零。

证明: 由导数定义 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

结合极限的保号性，可证得，略。

定理2 表明函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加(或减少)的充分必要条件是: $f'(x)\geq 0$ (或 $f'(x)\leq 0$)且仅在个别点上导数为零。

【例题1】确定函数 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 的单调区间。

解：$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1,-1,\frac{1}{5}$ 用点 $x=-1, x=\frac{1}{5}, x=1$ 划分函数 $f(x)$ 的定义域，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

单调增区间：$(-\infty,-1),(-1,\frac{1}{5}),(1,+\infty)$，单调减区间：$(\frac{1}{5},1)$。

- 一般来说，用导数为零的点来划分单调区间，有时导数不存在的点也可用来划分单调区间。

【例题2】确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x$ 的单调区间。

解：$f'(x)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-1=\dfrac{2-3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$，当 $x=\dfrac{8}{27}$ 时，$f'(x)=0$，

而在 $x=0$ 处，$f'(x)$ 不存在，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{8}{27})$	$\frac{8}{27}$	$(\frac{8}{27},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

单调增区间：$(0,\dfrac{8}{27})$，

单调减区间：$(-\infty,0),(\dfrac{8}{27},+\infty)$。

- 定理1也常用来证明不等式

【例题3】证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$。

证明：作函数：$F(x)=\sin x+\tan x-2x$,

找零点： $F(0)=0$,

求导数：$F'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$

判定导数的符号:

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $F'(x)>\cos^2 x+\sec^2 x-2\geq 0$,

单调性叙述：所以 $F(x)$ 单调增，故 $F(x)>F(0)=0$，证毕。

【例题4】证明：当 $x>0$ 时，$\sin x+\cos x>1+x-x^2$。

证明：作函数：$F(x)=\sin x+\cos x-1-x+x^2$，找零点：$F(0)=0$，

求导数：$F'(x)=\cos x-\sin x-1+2x$，

注意：直接判定导数的符号比较困难，重复流程

$F'(0)=0, F''(x)=-\sin x-\cos x+2>0$，所以，

当 $x>0$ 时，$F'(x)$ 单调增，有 $F'(x)>F'(0)=0$，

所以当 $x>0$ 时，$F(x)$ 单调增，故 $F(x)>F(0)=0$，证毕。

【例题5】证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$ 。

证明：显然当 $x=1$ 等号成立。

所以，需要分区间 $0<x<1, x>1$ 证明!

如果作函数: $F(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2, F(1)=0$

需要求三阶导数才能够判定导数的符号，略。

如果作函数: $H(x)=(x+1)\ln x-(x-1), H(1)=0$

需要求二阶导数才能够判定导数的符号，略。

【例题5】证明：作函数：$G(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}, G(1)=0$

求导数：$G'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x\cdot(x+1)^2}$，

当 $x>0$ 时，$G'(x)>0, G(x)$ 单调增，而 $G(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$G(x)<G(1)=0$，

即 $\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}<0 \Rightarrow (x^2-1)\ln x>(x-1)^2$，

当 $x>1$ 时，$G(x)>G(1)=0$，

即 $\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}>0 \Rightarrow (x^2-1)\ln x>(x-1)^2$，证毕。

【例题6】设 $e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$。

证明：作函数：$F(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$，$F(a)=0$

$$F'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{4}{e^2},\ F''(x)=2\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

当 $e<x<e^2$ 时，$F''(x)<0$，所以 $F'(x)$ 单调减少，

而 $F'(e^2)=0$，故当 $e<x<e^2$ 时，$F'(x)>F'(e^2)=0$，

所以 $F(x)$ 单调增加，因此当 $e<a<b<e^2$ 时，$F(b)>F(a)=0$，

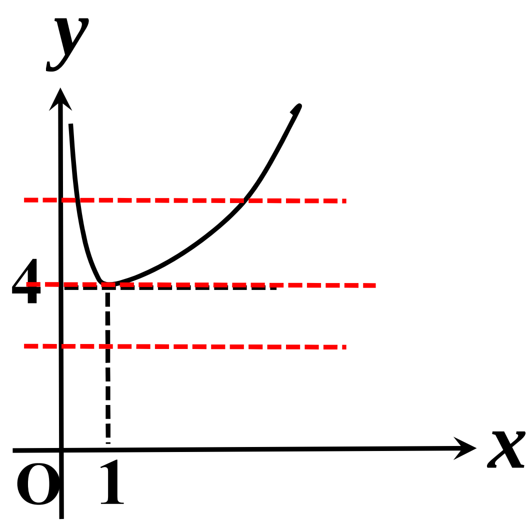
证毕。

- 定理1还可用来判定方程根的个数

【例题7】讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与曲线 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数。

解：作函数：$F(x)=4x+\ln^4 x-4\ln x$，$F(0^+)=+\infty, F(+\infty)=+\infty$

$F'(x)=4+4\ln^3 x\cdot\frac{1}{x}-\frac{4}{x}$，观察得到：$F'(1)=0$,



当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)>F(1)=4$,

当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)>F(1)=4$,

在 $x=1$ 处函数 $F(x)$ 取得最小值，最小值为 4。

当 $k<4$ 时，没有交点，当 $k=4$ 时，唯一交点，当 $k>4$ 时，两个交点。

4.4.2 函数的极值及其计算

定义：设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内连续，若 $\forall x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)$, 有

$f(x)< f(x_0)$ (或 $f(x)> f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值(或极小值)，而把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的极大值点(或极小值点)。

- 极大值、极小值统称为极值，

  极大值点、极小值点统称为极值点。

注意：极值与最值的异同。

- 函数取得极值的必要条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在点 x_0 处取得极值，

由费马引理可直接得: $f'(x_0)=0$。

即可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值的必要条件是：$f'(x_0)=0$。

- 驻点 把 $f'(x)=0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点。

注意：对于可导函数，极值点一定是驻点，

而驻点不一定是极值点。

问题：什么样的驻点是极值点?

- 函数取得极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内连续，在 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内可导，$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在，

(1) 若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x_0)$ 为极小值；

(2) 若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x_0)$为极大值；

(3) 若在点 x_0 的两侧导数$f'(x)$不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值。

证明：由单调性和极值定义直接可证得(略)。

- 函数取得极值的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$, 则

当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值;

当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值。

证明: 设 $f''(x_0)>0$, 由导数定义得:

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

由保号性知: 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$, 当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$,

由第一充分条件即可得, $f(x_0)$ 是函数的极小值，证毕。

【例题8】求函数 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 的极值。

解： $f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=1,-1,\frac{1}{5},$$

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{4^2\cdot 6^3}{5^5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

极大值为：$f_{\max}(\frac{1}{5})=\frac{4^2\cdot 6^3}{5^5}$，极小值为：$f_{\min}(1)=0$。

【例题9】求函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x$ 的极值。

解： $f'(x)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-1=\dfrac{2-3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$,

当 $x=\dfrac{8}{27}$ 时，$f'(x)=0$，而在 $x=0$ 处，$f'(x)$ 不存在，

列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{8}{27})$	$\frac{8}{27}$	$(\frac{8}{27},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$

极大值为：$f_{\max}(\dfrac{8}{27})=\dfrac{4}{27}$，极小值为：$f_{\min}(0)=0$。

4.4.3 函数的最大值、最小值问题

由闭区间上连续函数的性质知，闭区间上的连续函数必能取得最大值、最小值。

问题：怎样求函数的最大值、最小值?

常用方法是先求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值，然后与端点值 $f(a), f(b)$ 进行比较，其中最大者即为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，而最小者即为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，

具体分下列三种情况讨论。

- 函数的最大值、最小值问题

(1) 如果 $\forall x\in[a,b], f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$, 则函数的最大值、最小值必在端点 $x=a, x=b$ 处取得。

【例题10】求函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上的最大值、最小值。

解：由于 $f'(x)=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1-x}{1+x})^2}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}<0,$

所以：$f_{\max}(0)=\dfrac{\pi}{4}, f_{\min}(1)=0$。

(2) 如果在 $x_0, x_1 \in (a,b)$ 处有 $f'(x_0)=0, f'(x_1)$ 不存在，则函数 $f(x)$ 的最大值、最小值必在端点 $x=a, x=b$ 或 $x=x_0, x=x_1$ 处取得。

注：$f'(x_0)=0$ 与 $f'(x_1)$ 不存在的点都是可能的极值点。

只需将可能极值点处的函数值与端点值比较大、小就可得函数的最大值、最小值，而不需要判定 x_0, x_1 是否是极值点。

【例题11】求函数 $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$ 在 $[0,2]$ 上的最大值、最小值。

解：由于 $f'(x)=\sqrt[3]{x-1}+x\cdot\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\dfrac{4x-3}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$,

当 $x=\dfrac{3}{4}$ 时, $f'(x)=0$，而在 $x=1$ 处，$f'(x)$ 不存在,

比较函数值 $f(0)=0, f(2)=2, f(\frac{3}{4})=-\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{8}, f(1)=0$

得：$f_{\max}(2)=2, f_{\min}(\frac{3}{4})=-\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{8}$。

(3) 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有唯一的极值，则一定是函数 $f(x)$ 的最值。

【例题12】求数列 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 中最大的数。

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以最大数一定是一个有限数。

设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，则 $f'(x)=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

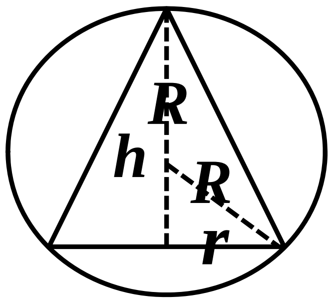
唯一驻点 $x=e$，所以最大数在 e 附近，比较 $\sqrt{2},\sqrt[3]{3}$，

得最大数为 $\sqrt[3]{3}$。

立志成才 报国裕民

【例题13】求内接于半径为 R 的球的正圆锥的最大体积。

解：设内接于球的正圆锥的底面半径为 r，高为 h，



则圆锥体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$,

而 $(h-R)^2+r^2=R^2$，所以 $r^2=2Rh-h^2$，

故 $V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h\cdot(2Rh-h^2)=\frac{\pi}{3}\cdot(2Rh^2-h^3)$,

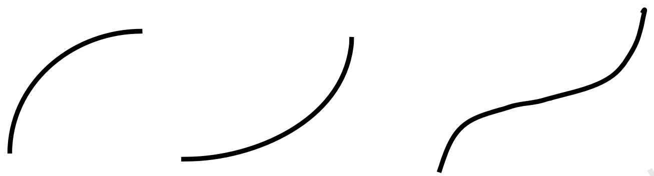
$V'=\frac{\pi}{3}\cdot(4Rh-3h^2)$，$V'=0\Rightarrow h=\frac{4}{3}R$,

应用问题，唯一驻点，即为所求！因此，$V_{\max}=\frac{16}{81}\pi R^3$。

注：如果记 $V=\frac{\pi}{6}\cdot h\cdot h\cdot(4R-2h)$ 由“$A-G$”不等式直接可得 $h=\frac{4}{3}R$。

4.4.4 函数的凸性与拐点

我们已经利用导数讨论了函数的单调性，但同样是单调增加的函数，其图像仍然存在很大的差异，如：



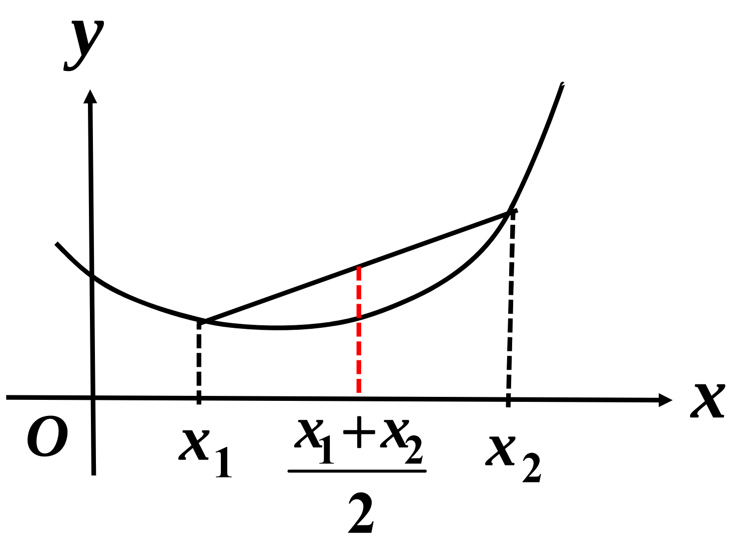
下面将讨论函数及其图像的另一种特性：凹凸性。

注意： 由于生活中常说的凹凸与数学上定义的凹凸性有差异，为了尽量不产生误解把 ∪称为下凸，而把∩称为上凸。

1. 函数凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$，有

(1) $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 的图形在 $[a,b]$ 上是下凸的，或称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是下凸的。



注意：数学上把图形是下凸的函数 $f(x)$ 称为凸函数。

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$，有

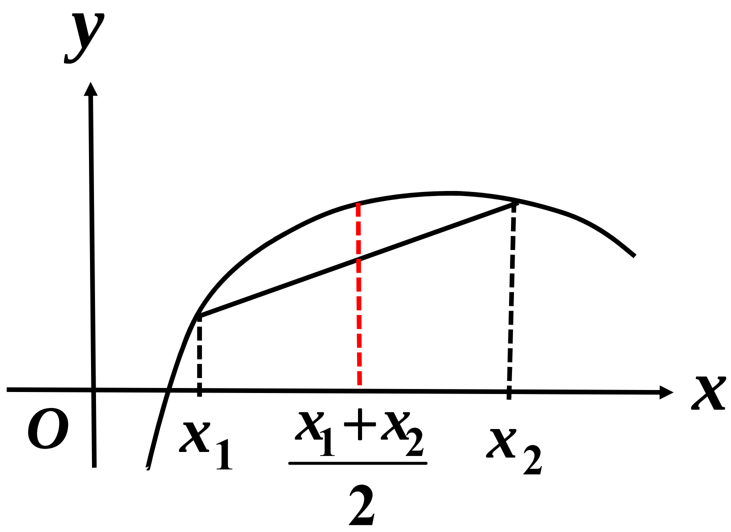
(2) $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 的图形在

$[a,b]$ 上是上凸的，或称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上凸的。

图形是上凸的函数 $f(x)$ 称为凹函数。

为了避免混淆，一般不用凹函数概念，

而是直接称函数为上凸函数。



2. 函数凸性的一般定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \neq x_2$，及 $\forall \alpha\ (0<\alpha<1)$，有

(1) $f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2] \leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是下凸的，

若将 "$\leq$" 改为 "$<$" 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格下凸的。

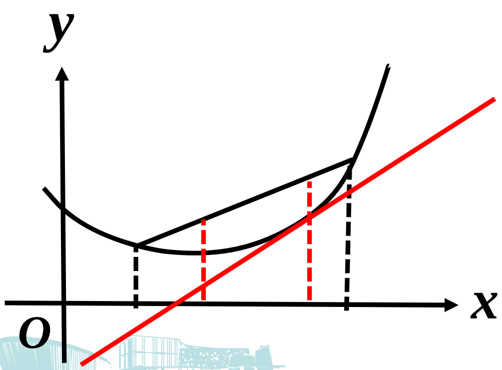
(2) $f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2] \geq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上凸的，

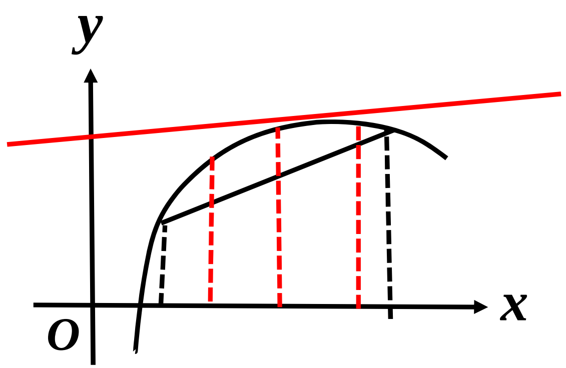
若将 "$\geq$" 改为 "$>$" 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格上凸的。

- 函数的凸性

下凸表示曲线上任意两点间的弦位于对应弧段的上方或曲线上任意点处的切线（如果存在的话）位于对应弧段的下方。

上凸表示曲线上任意两点间的弦位于对应弧段的下方或曲线上任意点处的切线（如果存在的话）位于对应弧段的上方。





用定义来判定函数的凸性是比较困难的，下面给出充分条件。

3. 函数凸性判定的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，若导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加(或减少)，那么函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格下凸(或上凸)的。

证明：设 $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$，记 $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ 则 $x_1 < x_0 < x_2$，

分别在 $[x_1,x_0]$ 和 $[x_0,x_2]$ 上应用拉格朗日定理

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1), (x_1 < \xi_1 < x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0), (x_0 < \xi_2 < x_2)$$

函数凸性判定的第一充分条件

证明(续)：将两式相减得：

$$2f(x_0)-f(x_1)-f(x_2)=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]\cdot\frac{x_2-x_1}{2}$$

注意：$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $\xi_1<\xi_2$，由于 $f'(x)$ 单调增加，

所以：$f(x_0)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，即：$f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

故函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格下凸，证毕。

4. 函数凸性判定的第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，当 $f''(x)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格下凸的，

当 $f''(x)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格上凸的。

证明：设 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$，记 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 则 $x_1<x_0<x_2$，

当 $f''(x)>0$ 时，由一阶泰勒公式得：

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2>f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2>f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$$

相加得：$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0)$，即 $f(x)$ 下凸，证毕。

5. 拐点

设函数 $f(x)$在 (a,b) 内连续，函数 $f(x)$ 下凸与上凸的分界点 x_0称为函数 $f(x)$ 的拐点，把点$(x_0, f(x_0))$称为曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

与利用导数 $f'(x)$ 确定函数 $f(x)$ 的单调区间、极值类似利用二阶导数 $f''(x)$ 可确定函数 $f(x)$ 的凸向区间、拐点。

【例题14】确定函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3}$ 的凸向区间并求曲线的拐点。

【例题14】

解：$f'(x)=\dfrac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}$，$f''(x)=-\dfrac{6x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}$，

当 $x=0, x=\pm 3$ 时，$f''(x)=0$

列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	$-\dfrac{9}{4}$	$\cap$	0	$\cup$	$\dfrac{9}{4}$	$\cap$

曲线的拐点：$(-3,-\dfrac{9}{4}),(0,0),(3,\dfrac{9}{4})$。

【例题15】确定函数 $f(x)=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$ 的凸向区间并求曲线的拐点。

解： $f'(x)=\dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$, $f''(x)=\dfrac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$,

当 $x=-1$ 时，$f''(x)=0$，当 $x=0$ 时，$f''(x)$ 不存在，

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\cap$	-6	$\cup$	0	$\cup$

曲线的拐点：$(-1,-6)$。

【例题16】证明不等式：$\forall a,b>0,\ (a+b)\cdot e^{a+b}\le a\cdot e^{2a}+b\cdot e^{2b}$。

证明：作函数 $f(x)=x\cdot e^{2x}$，则 $f'(x)=(2x+1)\cdot e^{2x},\ f''(x)=4(x+1)\cdot e^{2x}$,

当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，所以，函数 $f(x)$ 是下凸的，

故 $\forall a,b>0,\ f(\frac{a+b}{2})\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$，即 $(a+b)\cdot e^{a+b}\le a\cdot e^{2a}+b\cdot e^{2b}$

证毕。

注意：由于 $a=b$ 不等式显然成立，

不妨设 $b>a$，作函数 $F(x)=x\cdot e^{2x}+a\cdot e^{2a}-(a+x)\cdot e^{a+x}$，

则 $F(a)=0$，利用单调性可以证明，作为练习。

4.4.5 曲线的渐近线与函数图像的描绘

1. 曲线的渐近线

如果存在直线 L, 当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时，曲线 $y = f(x)$ 上的点与直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线。

(1). 曲线的垂直渐近线

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线。

(2). 曲线的水平渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

(3). 曲线的斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$,

或 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$,

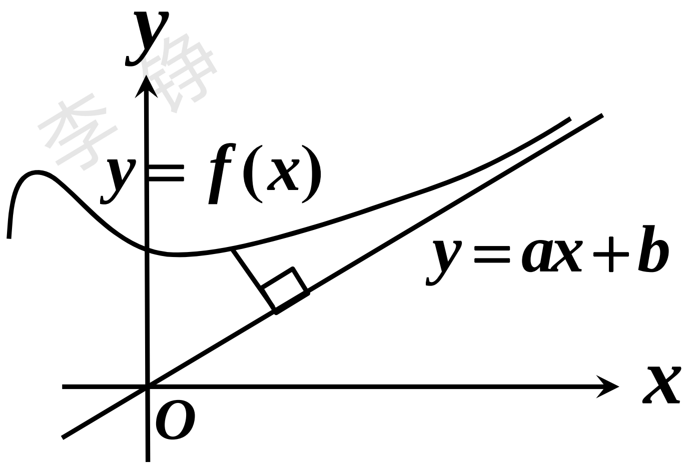
则称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线。

- 曲线的斜渐近线的推导如下：

如果直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，

由渐近线的定义知：

$$d=\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)-(ax+b)|}{\sqrt{1+a^2}}=0,$$



所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b,$

得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$。

注意：当 $x\to-\infty$ 时，需另外同样讨论。

【例题17】求曲线 $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$ 的渐近线。

解：显然，$x=\pm 1$ 为曲线的垂直渐近线；

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=1$, 所以，$y=1$ 为水平渐近线。

【例题18】求曲线 $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的渐近线。

解：$x=1$ 为曲线的垂直渐近线，无水平渐近线，

由于 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1$,

而 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-a\cdot x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=5$，所以，$y=x+5$ 为斜渐近线。

立志成才 报国裕民

【例题19】求曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线。

解：显然，$x=0$ 为曲线的垂直渐近线；

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$，所以，$y=0$ 为水平渐近线。

而 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$，

且 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-a\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=0$，

所以，$y=x$ 为斜渐近线。

【例题20】求曲线 $y=(2x+1)\cdot e^{\pi-2\arctan x}$ 的渐近线。

解： 曲线无垂直渐近线也无水平渐近线，

由于 $a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)}{x}\cdot e^{\pi-2\arctan x}=2,$

而 $b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-a_1\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[2x\cdot(e^{\pi-2\arctan x}-1)+e^{\pi-2\arctan x}]$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\pi-2\arctan x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}2x\cdot(e^{\pi-2\arctan x}-1)=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\pi-2\arctan x}-1}{\frac{1}{x}}=4$

所以，$y=2x+5$ 为斜渐近线。

同理，当 $x\to-\infty$ 时，$a_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=2e^{2\pi},b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(y-a_2x)=5e^{2\pi}$，

所以，$y=2e^{2\pi}x+5e^{2\pi}$ 是曲线的另一条斜渐近线。

2. 函数图像的描绘

(1) 确定函数的定义域，函数的奇、偶性，周期性；

(2) 计算函数的一阶导数、二阶导数；

(3) 求出 $f'(x)=0, f''(x)=0$ 及不存在的点；

(4) 用 (3) 中得到的点将定义域分成若干个小区间，

列表格讨论函数的单调区间、极值，凸向区间与拐点；

(5) 求出曲线的渐近线；

(6) 求出各个分割点的函数值，可能的话，求出曲线在坐标轴

上的截距，结合函数的性质用光滑曲线描绘出函数的图形。

【例题21】全面讨论函数 $y=x-\dfrac{\ln x}{x}$ 的性态，并描绘曲线的图形。

解：函数的定义域为：$x>0$，$f'(x)=1-\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$f''(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$，

当 $x=1$时，$f'(x)=0$，当 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 时，$f''(x)=0$，

列表：

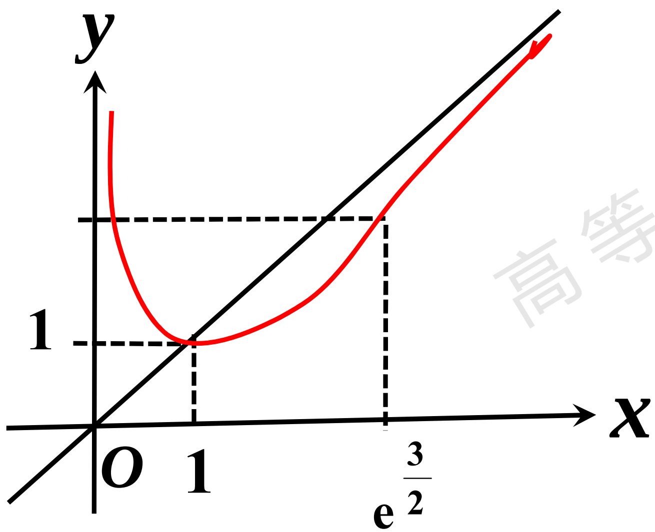
x	$(0,1)$	1	$(1,e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow\cup$	1	$\nearrow\cup$	*	$\nearrow\cap$

极小值 $f_{\min}(1)=1$，拐点 $(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{2e^3-1}{2e^{\frac{3}{2}}})$。

【例题21】解(续):

曲线的垂直渐近线：$x=0$，曲线的斜渐近线：$y=x$，

描绘曲线的图形，注意：先确定曲线的渐近线，



【例题22】全面讨论函数 $y=\dfrac{(x+1)^3}{2(x-1)^2}$ 的性态，并描绘曲线的图形。

解：函数的定义域为：$x\neq 1$，$f'(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{2(x-1)^3}$，$f''(x)=\dfrac{12(x+1)}{(x-1)^4}$，

当 $x=-1\ x=5$ 时，$f'(x)=0$，当 $x=-1$ 时，$f''(x)=0$，

列表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	×	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	×	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗∩	0	↗∪	×	↘∪	$\dfrac{27}{4}$	↗∪

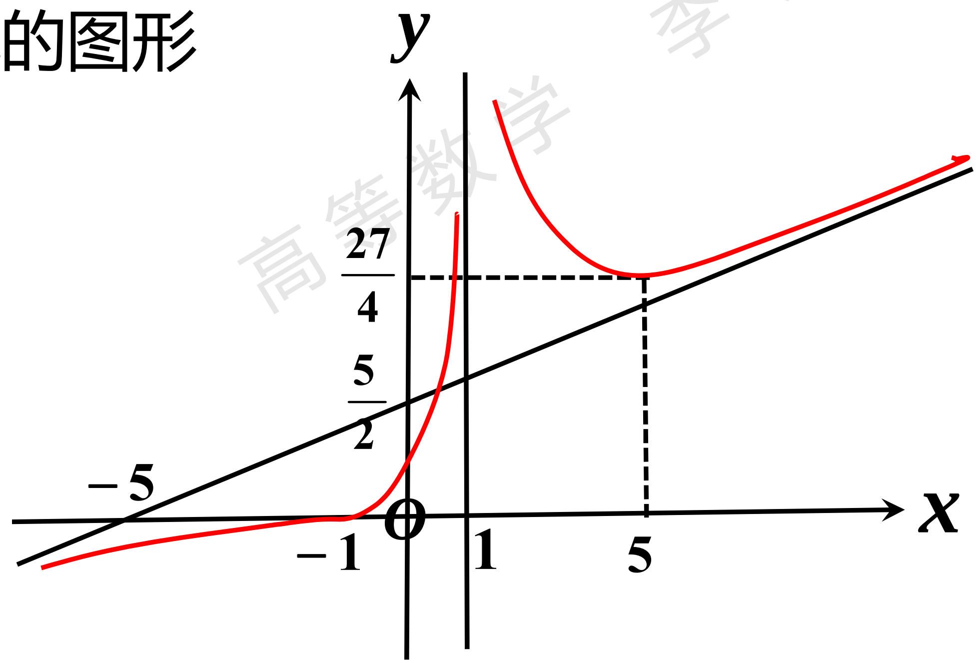
极小值 $f_{\min}(5)=\dfrac{27}{4}$，拐点 $(-1,0)$。

【例题22】解(续):

曲线的垂直渐近线：$x=1$,

由例题18知，曲线的斜渐近线：$y=\dfrac{x+5}{2}$,

描绘曲线的图形



本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！