高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

4.3 泰勒 (*Taylor*)公式及其应用

由微分定义知：$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y$，

或当 $|x - x_0|$ 很小时，$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$，

即用 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 作为函数 $f(x)$ 的近似值时，

误差为：$o(x - x_0)$，

由此产生的问题是：误差的具体形式是什么？怎样提高精度？

问题：假设 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k_1(x, x_0)\cdot(x - x_0)^2$ 成立，

那么 $k_1(x, x_0)$ 是什么？

设 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+k_1(x,x_0)\cdot(x-x_0)^2$

作函数 $F(t)=f(x)-[f(t)+f'(t)(x-t)+k_1(x,x_0)\cdot(x-t)^2]$

则 $F(x)=F(x_0)=0$, 由罗尔定理知存在 ξ 介于 x, x_0 之间，使得

$F'(\xi)=0$, 即 $-[f'(\xi)+f''(\xi)(x-\xi)-f'(\xi)-2k_1\cdot(x-\xi)]=0$

由于 $x-\xi\neq 0$, 所以：$k_1=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$, 其中 ξ 介于 x,x_0 之间。

因此，$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-x_0)^2\cdots\cdots\cdots(*)$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间，上式 (*) 称为一阶泰勒(Taylor)公式。

拉格朗日定理: $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$, 其中 ξ 介于 x,x_0 之间。

又称为零阶泰勒(Taylor)公式。

设 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+k_2(x,x_0)\cdot(x-x_0)^3$

同理可得: $k_2=\dfrac{1}{3!}f'''(\xi)$, 其中 ξ 介于 x,x_0 之间。

因此，可得到二阶泰勒(Taylor)公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot(x-x_0)^3$$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间。

4.3.1. 泰勒 (Taylor) 公式

定理4.3.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 阶

导数，$x\in U(x_0)$ 且 $x\neq x_0$， 则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+R_n\cdots(1)$$

其中 $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项，ξ 介于 x,x_0 之间。

(1) 式称为带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒(Taylor)公式。

证法1： 类似推导一阶泰勒公式的方法，由数学归纳法逐步证得。(略)

证法2：记多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

设 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$，则 $R_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 导数，且

$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$，连续应用柯西定理，得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)\cdot n\cdot(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

$$=\cdots=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

所以 $R_n(x)=\dfrac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\Rightarrow f(x)=P_n(x)+R_n(x)$,

其中 ξ 介于 x_0,ξ_n 之间，当然介于 x,x_0 之间，证毕。

立志成才 报国裕民

定理4.3.2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在点 x_0 有 n 阶导数，$x\in U(x_0)$ 且 $x\neq x_0$，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+R_n\cdots(2)$$

其中 $R_n=o[(x-x_0)^n]$ 称为佩亚诺(Peano)余项。

(2) 式称为带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒(Taylor)公式。

- 微分定义 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

可看成带有佩亚诺余项的一阶泰勒(Taylor)公式。

立志成才 报国裕民

4.3.2. 麦克劳林 (*Maclaurin*)公式

当 $x_0=0$ 时，

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+R_n\cdots(3)$$

其中 $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},(0<\theta<1)$ 称为拉格朗日余项，

$R_n=o(x^n)$ 称为佩亚诺余项。

(3)式称为 n 阶麦克劳林(Maclaurin)公式。

也可以直接称为 n 阶泰勒(Taylor)公式。

- 一些简单函数的麦克劳林公式

（1）函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶麦克劳林公式。

由于 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x, f^{(k)}(0)=1$，所以

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot x^n+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},(0<\theta<1)$$

（2）函数 $f(x)=\sin x$ 的 $2n$ 阶麦克劳林公式。

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{5!}\cdot x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1},(0<\theta<1)$$

注意：$f(x)=\sin x$ 的 $(2n-1)$ 阶麦克劳林公式余项有变化。

（3）函数 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 的 n 阶麦克劳林公式。

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1},(0<\theta<1)$

当 $\alpha=n$ 为正整数时，余项为零，公式即为二项式展开式。

当 $\alpha=-1$ 时，有 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

注意：在没有明确要求时，余项用佩亚诺余项表示即可。

变化：$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

（4）函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶麦克劳林公式。

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\cdot x^{n+1},(0<\theta<1)$

【例题1】写出函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=1$ 处的 n 阶泰勒公式。

解法1：直接求 $f^{(k)}(x)$ 及 $f^{(k)}(1)$ 写出相应泰勒公式，略。

解法2： 利用(4)中给出的公式间接方法展开。

$$\ln x=\ln[1+(x-1)]=(x-1)-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot(x-1)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n+1}}\cdot(x-1)^{n+1},(0<\theta<1)$ 或 $R_n(x)=o[(x-1)^n]$。

4.3.3. 泰勒公式的应用

n 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+R_n$$

泰勒公式应用的关键是：

（1）当函数 $f(x)$ 有 $(n+1)$ 阶导数时，可应用

带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

（2）当函数 $f(x)$ 有 n 阶导数时，只可应用

带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

（3）怎样选取两个不同的点 x, x_0 $(x\neq x_0)$。

1. 近似计算

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

【例题2】计算 e 的近似值，且误差小于 10^{-6} 。

解：$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+1)!}, (0 < \theta < 1)$

而 $|R_n| < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$,

当 $n = 9$ 时，$\frac{3}{10!} < 10^{-6}$，所以：$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$

2. 计算极限

当 α 为无穷小时，有 $\alpha+o(\alpha)\sim\alpha$，

即在求极限时可以把不必要的高阶无穷小去掉！

由 n 阶麦克劳林公式知

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+o(x^n)$$

给出了 x 的各阶无穷小，在求极限时需要几阶就选相应几项，

因此，大部分求极限的题都可使用泰勒公式来计算。

要求：熟悉常用公式，灵活使用。

【例题2】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}x^2}-\cos x}{x^4}$。

解：由于 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$,

所以：$e^{-\frac{1}{2}x^2}=1+(-\dfrac{1}{2}x^2)+\dfrac{1}{2!}(-\dfrac{1}{2}x^2)^2+o(x^4)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$

而 $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{1}{12}$。

【例题3】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\,f(x)}{x^3}=\frac{1}{2},$$ 求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 的值。

解：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，

所以 $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{f''(0)}{2}\cdot x^2+o(x^2)$,

而 $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$,

故 $\sin x+x\,f(x)=[1+f(0)]\cdot x+f'(0)\cdot x^2+[\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{6}]\cdot x^3+o(x^3)$

由 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\,f(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$, 可得 $f(0)=-1, f'(0)=0, f''(0)=\dfrac{4}{3}$。

3. 函数值估计

【例题4】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4\cdot|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$。

证明：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，在区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上

应用一阶泰勒公式，得到：

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)(\frac{a+b}{2}-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{a+b}{2}-a)^2,(a<\xi_1<\frac{a+b}{2})$$

$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2,(a<\xi_1<\frac{a+b}{2})$$

【例题4】证明(续):

同理在区间 $[\frac{a+b}{2},b]$ 上应用一阶泰勒公式可得:

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2,(\frac{a+b}{2}<\xi_2<b)$$

两式相减得: $f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$

所以: $|f(b)-f(a)|\le\frac{(b-a)^2}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]\le\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\},(a<\xi<b)$,证毕。

【例题5】设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，且

$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$。

证明：分别在区间 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上应用二阶泰勒公式

$$f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+\frac{f''(0)}{2!}(-1)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1)^3, (-1<\xi_1<0)$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{f''(0)}{2!}\cdot 1^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}\cdot 1^3, (0<\xi_2<1)$$

代入已知条件，相减得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$,

由于 $f'''(x)$ 连续，所以 $\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$ 使得

$$f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3,$$ 证毕。

【例题6】设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且满足

$|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$，证明：$|f'(x)|\le 2$。

证明：分别在 $[0,x]$ 和 $[x,2]$ 应用一阶泰勒公式

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(-x)^2,(0<\xi_1<x)$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)\cdot(2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\cdot(2-x)^2,(x<\xi_2<2)$$

相减得 $$f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(2-x)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot x^2$$

所以 $2|f'(x)|\le 1+1+\frac{1}{2}[(2-x)^2+x^2]\le 2+2=4$，证毕。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢　谢！