



高等数学 (I)

高等数学 李铮

主讲教师：李铮



立志成才 报国裕民



上一次课程内容回顾

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民

4.3 泰勒 (Taylor) 公式及其应用

由微分定义知: $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx dy$,

或当 $|x - x_0|$ 很小时, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,

即用 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 作为函数 $f(x)$ 的近似值时,

误差为: $o(x - x_0)$,

由此产生的问题是: **误差**的具体形式是什么? 怎样提高**精度**?

问题: 假设 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k_1(x, x_0) \cdot (x - x_0)^2$ 成立,

那么 $k_1(x, x_0)$ 是什么?



4.3 泰勒公式及其应用

设 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k_1(x, x_0) \cdot (x - x_0)^2$

作函数 $F(t) = f(x) - [f(t) + f'(t)(x - t) + k_1(x, x_0) \cdot (x - t)^2]$

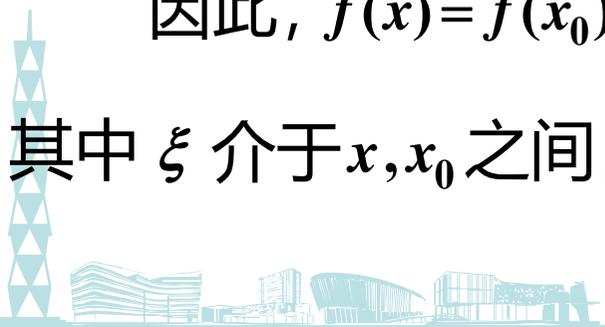
则 $F(x) = F(x_0) = 0$, 由罗尔定理知存在 ξ 介于 x, x_0 之间, 使得

$$F'(\xi) = 0, \text{ 即 } -[f'(\xi) + f''(\xi)(x - \xi) - f'(\xi) - 2k_1 \cdot (x - \xi)] = 0$$

由于 $x - \xi \neq 0$, 所以: $k_1 = \frac{1}{2} f''(\xi)$, 其中 ξ 介于 x, x_0 之间。

$$\text{因此, } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (x - x_0)^2 \dots \dots \dots (*)$$

其中 ξ 介于 x, x_0 之间, 上式 (*) 称为**一阶泰勒(Taylor)公式**。



4.3 泰勒公式及其应用



拉格朗日定理: $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, 其中 ξ 介于 x, x_0 之间。

又称为**零阶泰勒(Taylor)公式**。

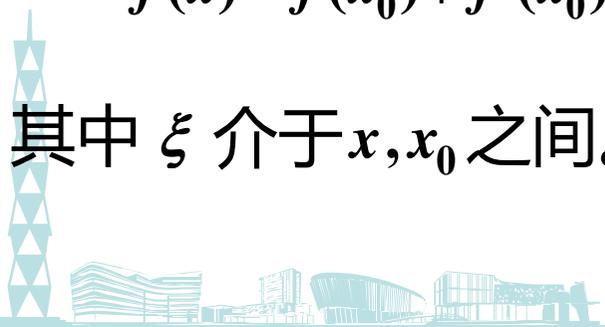
$$\text{设 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + k_2(x, x_0) \cdot (x - x_0)^3$$

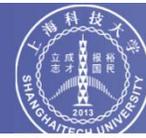
同理可得: $k_2 = \frac{1}{3!} f'''(\xi)$, 其中 ξ 介于 x, x_0 之间。

因此, 可得到**二阶泰勒(Taylor)公式**:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x - x_0)^3$$

其中 ξ 介于 x, x_0 之间。





4.3 泰勒公式及其应用

4.3.1. 泰勒 (Taylor) 公式

定理4.3.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 阶

导数, $x \in U(x_0)$ 且 $x \neq x_0$, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n \cdots (1)$$

其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项, ξ 介于 x, x_0 之间。

(1) 式称为带有拉格朗日余项的 n 阶**泰勒(Taylor)公式**。

证法1: 类似推导一阶泰勒公式的方法, 由数学归纳法逐步证得。(略)

4.3 泰勒公式及其应用



证法2: 记多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

设 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, 则 $R_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 阶导数, 且

$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$, 连续应用柯西定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1) \cdot n \cdot (\xi_2-x_0)^{n-1}} \\ &= \cdots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)! (\xi_n-x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

所以 $R_n(x) = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \Rightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x)$,

其中 ξ 介于 x_0, ξ_n 之间, 当然介于 x, x_0 之间, 证毕。

4.3 泰勒公式及其应用



定理4.3.2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 且

在点 x_0 有 n 阶导数, $x \in U(x_0)$ 且 $x \neq x_0$, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n \cdots (2)$$

其中 $R_n = o[(x - x_0)^n]$ 称为佩亚诺(Peano)余项。

(2) 式称为带有佩亚诺余项的 n 阶**泰勒(Taylor)公式**。

• **微分定义** $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

可看成带有佩亚诺余项的一阶**泰勒(Taylor)公式**。

4.3 泰勒公式及其应用



4.3.2. 麦克劳林 (Maclaurin) 公式

当 $x_0 = 0$ 时,

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n \cdots (3)$$

其中 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, ($0 < \theta < 1$) 称为拉格朗日余项,

$R_n = o(x^n)$ 称为佩亚诺余项。

(3)式称为 n 阶麦克劳林 (Maclaurin) 公式。

也可以直接称为 n 阶泰勒 (Taylor) 公式。



4.3 泰勒公式及其应用

一些简单函数的麦克劳林公式

(1) 函数 $f(x) = e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式。

由于 $f^{(k)}(x) = e^x, f^{(k)}(0) = 1$, 所以

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

(2) 函数 $f(x) = \sin x$ 的 $2n$ 阶麦克劳林公式。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, (0 < \theta < 1)$$

注意: $f(x) = \sin x$ 的 $(2n-1)$ 阶麦克劳林公式余项有变化。



4.3 泰勒公式及其应用

(3) 函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的 n 阶麦克劳林公式。

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + R_n(x)$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

当 $\alpha = n$ 为正整数时，余项为零，公式即为二项式展开式。

$$\text{当 } \alpha = -1 \text{ 时，有 } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

注意：在没有明确要求时，余项用佩亚诺余项表示即可。

$$\text{变化：} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

4.3 泰勒公式及其应用



(4) 函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的 n 阶麦克劳林公式。

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \cdot x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

【例题1】 写出函数 $f(x) = \ln x$ 在 $x_0 = 1$ 处的 n 阶泰勒公式。

解法1: 直接求 $f^{(k)}(x)$ 及 $f^{(k)}(1)$ 写出相应泰勒公式, 略。

解法2: 利用(4)中给出的公式间接方法展开。

$$\ln x = \ln[1+(x-1)] = (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \cdot (x-1)^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n+1}} \cdot (x-1)^{n+1}, (0 < \theta < 1) \text{ 或 } R_n(x) = o[(x-1)^n].$$

4.3 泰勒公式及其应用



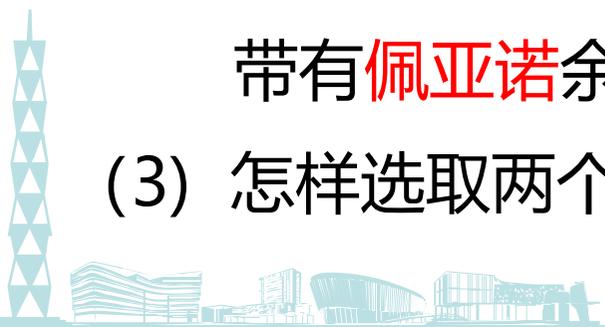
4.3.3. 泰勒公式的应用

n 阶泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n$$

泰勒公式应用的关键是：

- (1) 当函数 $f(x)$ 有 $(n+1)$ 阶导数时，可应用带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。
- (2) 当函数 $f(x)$ 有 n 阶导数时，只可应用带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式。
- (3) 怎样选取两个不同的点 x, x_0 ($x \neq x_0$)。



4.3 泰勒公式及其应用



1. 近似计算

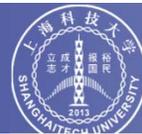
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

【例题2】 计算 e 的近似值, 且误差小于 10^{-6} 。

解: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, (0 < \theta < 1)$

$$\text{而 } |R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

当 $n = 9$ 时, $\frac{3}{10!} < 10^{-6}$, 所以: $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$



4.3 泰勒公式及其应用

2. 计算极限

当 α 为无穷小时, 有 $\alpha + o(\alpha) \sim \alpha$,

即在求极限时可以把**不必要**的高阶无穷小去掉!

由 n 阶**麦克劳林公式**知

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

给出了 x 的各阶无穷小, 在求极限时需要几阶就选相应几项,

因此, 大部分求极限的题都可使用泰勒公式来计算。

要求: 熟悉常用公式, 灵活使用。

4.3 泰勒公式及其应用



【例题2】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} - \cos x}{x^4}$ 。

解： 由于 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$,

所以: $e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 + (-\frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}x^2)^2 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

而 $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$

故原极限 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{8} - \frac{1}{24})x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{12}$ 。

4.3 泰勒公式及其应用



【例题3】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}, \text{ 求 } f(0), f'(0), f''(0) \text{ 的值.}$$

解: 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导,

$$\text{所以 } f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + o(x^2),$$

$$\text{而 } \sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3),$$

$$\text{故 } \sin x + x f(x) = [1 + f(0)] \cdot x + f'(0) \cdot x^2 + \left[\frac{f''(0)}{2} - \frac{1}{6} \right] \cdot x^3 + o(x^3)$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } f(0) = -1, f'(0) = 0, f''(0) = \frac{4}{3}.$$

4.3 泰勒公式及其应用



3. 函数值估计

【例题4】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$,

证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $|f''(\xi)| \geq \frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$ 。

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 在区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 上

应用一阶泰勒公式, 得到:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f(a) + f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2, \quad (a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}) \\ &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2, \quad (a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}) \end{aligned}$$

4.3 泰勒公式及其应用



【例题4】证明(续):

同理在区间 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 上应用一阶泰勒公式可得:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2, \left(\frac{a+b}{2} < \xi_2 < b\right)$$

$$\text{两式相减得: } f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

$$\text{所以: } |f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \leq \frac{(b-a)^2}{4} |f''(\xi)|$$

其中 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, $(a < \xi < b)$, 证毕。



4.3 泰勒公式及其应用



【例题5】 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数, 且

$$f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0, \text{ 证明: } \exists \xi \in (-1,1), \text{ 使得 } f'''(\xi) = 3.$$

证明: 分别在区间 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上应用二阶泰勒公式

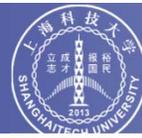
$$f(-1) = f(0) + f'(0)(-1) + \frac{f''(0)}{2!}(-1)^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1)^3, (-1 < \xi_1 < 0)$$

$$f(1) = f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!} \cdot 1^3, (0 < \xi_2 < 1)$$

代入已知条件, 相减得 $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$,

由于 $f'''(x)$ 连续, 所以 $\exists \xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1,1)$ 使得

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = 3, \text{ 证毕.}$$



4.3 泰勒公式及其应用

【例题6】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且满足

$$|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1, \text{ 证明: } |f'(x)| \leq 2.$$

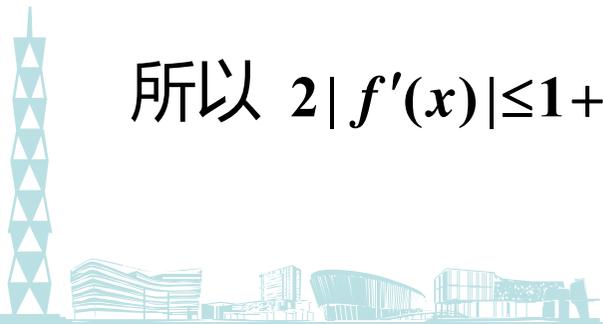
证明: 分别在 $[0,x]$ 和 $[x,2]$ 应用一阶泰勒公式

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(-x)^2, (0 < \xi_1 < x)$$

$$f(2) = f(x) + f'(x) \cdot (2-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} \cdot (2-x)^2, (x < \xi_2 < 2)$$

相减得 $f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{f''(\xi_2)}{2} \cdot (2-x)^2 - \frac{f''(\xi_1)}{2} \cdot x^2$

所以 $2|f'(x)| \leq 1 + 1 + \frac{1}{2}[(2-x)^2 + x^2] \leq 2 + 2 = 4$, 证毕。





本次课程内容小结

下次课程内容预告

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民



谢谢!

高等数学 李铮

