高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

4.2 洛必达(L'Hospital)法则

在第二章中我们学习了极限的定义（包括数列极限的“$\varepsilon-N$”定义和函数极限的“$\varepsilon-X$”,“$\varepsilon-\delta$”定义)、极限存在准则、两个重要极限、无穷小的定义、性质、比较等，求极限主要方法：极限运算法则、重要极限、等价无穷小的代换等。

对于不定型“$\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$”的极限主要通过消去无穷因子或消去零因子的方法解决。但是，如果遇到求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$，我们仍然无法解决，这一节我们将介绍利用导函数来求极限的方法。

4.2.1. 不定型“$\frac{0}{0}$”的定值法

定理4.2.1 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内有定义，如果

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0,$

(2) $f(x), g(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0,$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A,$ A 为常数 (或为 ∞) ,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

这样求极限的方法称为洛必达（L'Hospital）法则。

注意：(1) 应用定理4.2.1求极限时，必须是不定型 "$\frac{0}{0}$"，

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大时，不能说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

例如，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}=0$，而极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\sec^2 x}$ 不存在。

(3) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然是不定型时，可继续使用洛必达法则。

【例题1】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$。

【例题2】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\tan x}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sec^2 x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=-\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=-1。$$

回顾:

极限运算法则的变化:

(1) 当 $\lim v = b$ 时，有 $\lim(u \pm v) = \lim u \pm b$；

(2) 当 $\lim v = c \neq 0$ 时，有 $\lim(u \cdot v) = c \cdot \lim u$。

常用的等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x,$$

当 $x \to x_0$ 时，令 $t = x - x_0 \to 0$，当 $x \to \infty$ 时，令 $t = \frac{1}{x} \to 0$。

- 求极限的基本方法：

  (1) 确定极限存在且不为零的因子，

  (2) 利用无穷小等价代换，

  (3) 应用洛必达法则。

- 求极限的特殊方法：无穷小的性质

  无穷小乘以有界量仍然是无穷小。

【例题3】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$。

注意比较:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot 1}{x^3} = -\frac{1}{6}。$$

由上面比较可知，在加、减运算时，不要用等价代换！

问题：如何求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$?

【例题4】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\cdot(e^{x^3}-x^3-1)}{(2+3x)\ln(1+x)(e^{2x}-1)(1-\sqrt[3]{1-x^4})}$。

解：显然不会直接用洛必达法则求极限。

由求极限的基本方法知

$$原式=\frac{e}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-x^3-1}{x\cdot(2x)\cdot(-\frac{1}{3})(-x^4)}=\frac{3e}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-x^3-1}{x^6}$$

$$=\frac{3e}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cdot e^{x^3}-3x^2}{6x^5}=\frac{3e}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}=\frac{3e}{8}。$$

【例题5】求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$。

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(-2)(\pi-2x)}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2}=-\frac{1}{8}。$$

定理4.2.2 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $|x|>M$ 时有定义，如果

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0,$

(2) $f(x), g(x)$ 在 $|x|>M$ 时可导，且 $g'(x)\neq 0,$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A,$ A 为常数,（或为 ∞），

则有 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

这也称为求极限的洛必达法则。

证明: 利用变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$, 将 $x\to\infty$ 化为 $t\to 0$, 直接由定理4.2.1

可得结论，略。

【例题6】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e^{1+\frac{1}{x}}-e}$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{e^{1+\frac{1}{x}}-e}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{e}$。

4.2.2. 不定型 “$\frac{\infty}{\infty}$” 的定值法

定理4.2.3 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内有定义，如果

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty,$

(2) $f(x),g(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0,$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A,$ A 为常数，(或为 ∞) ，

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$。这也是洛必达法则。

注：(1) 如果没有条件 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 结论同样成立；

(2) 当 $x\to\infty$ 时，有类似的结果。

洛必达法则是求函数极限的一种主要方法，对于两种类型

“$\frac{0}{0}$” 和 “$\frac{\infty}{\infty}$” 及两种极限形式 $x\to x_0, x\to\infty$ 都有相应的结论。

即有 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\\ \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x\to x_0\\ x\to\infty\end{array}\right.$$

【例题7】求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(\tan\frac{\pi}{2}x)}{\ln(1-x)}$。

解：

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(\tan\frac{\pi}{2}x)}{\ln(1-x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\cot\frac{\pi}{2}x\cdot\sec^2\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{1-x}}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}x}=-1。$$

立志成才 报国裕民

【例题8】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{a^x}$，其中 m 为正整数，$a>1$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m\cdot x^{m-1}}{a^x\cdot\ln a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m\cdot(m-1)\cdot x^{m-2}}{a^x\cdot(\ln a)^2}=\cdots=0$。

常用结论：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{2^x}=0$，

【例题9】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^m x}{x}$，其中 m 为正整数。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^m x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m\cdot\ln^{m-1}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{m\cdot(m-1)\cdot\ln^{m-2}x}{x}=\cdots=0$。

常用结论：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{100}x}{x}=0$，变化：$\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln^{100}x=0$。

- 当 $x\to+\infty$ 趋于 $+\infty$ 的快慢程度依次为：

$$x^x,a^x\,(a>1),x^k\,(k>1),x,\ln^k x\,(k>1),\ln x。$$

- 对于数列趋于 $+\infty$ 的快慢程度依次为：

$$n^n,n!,a^n\,(a>1),n^k\,(k>1),n,\ln^k n\,(k>1),\ln n。$$

- 洛必达法则有时会无效的，例如：

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=0$。

立志成才 报国裕民

4.2.3. 其它不定型的定值法

- 其它不定型 “$0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$”

1. 不定型 “$0\cdot\infty$”

- 不定型 “$0\cdot\infty$” 通常可化为不定型 “$\frac{0}{0}$” 或 “$\frac{\infty}{\infty}$”

$$“0\cdot\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}”$$

注意：根据具体函数再作选择。

【例题10】求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln^2 x$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln^2 x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$。

常用结论：$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln^{100} x = 0$。

注意：如果选择计算

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln^2 x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\ln^3 x}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x\ln^3 x = \cdots$$

【例题11】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\cdot\ln x$ 。

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\dfrac{1}{\ln x}}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\ln^2 x}{x}=0。$$

2. 不定型“$\infty-\infty$”

- 不定型“$\infty-\infty$”通常可通分化为“$\dfrac{0}{0}$”

如：$\infty_2-\infty_1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\infty_2}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{\infty_1}}=\dfrac{\dfrac{1}{\infty_1}-\dfrac{1}{\infty_2}}{\dfrac{1}{\infty_2}\cdot\dfrac{1}{\infty_1}}=\dfrac{0}{0}$。

【例题12】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\cdot(\mathrm{e}^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\dfrac{1}{2}$。

【例题13】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}$。

【例题14】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$。

解：$(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}=\mathrm{e}\cdot[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1]\sim\mathrm{e}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}$

所以：原式 $=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

3. 不定型 “$1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$ ”

- 一般情况下遇到“u^{v}” 形式，建议先化为 “$\mathrm{e}^{v\ln u}$”。

形式上有 $1^{\infty}=\mathrm{e}^{\infty\cdot\ln 1}=\mathrm{e}^{\infty\cdot 0},\infty^{0}=\mathrm{e}^{0\cdot\ln\infty}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty},0^{0}=\mathrm{e}^{0\cdot\ln 0}=\mathrm{e}^{0\cdot\infty}$。

【例题15】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}]^{\frac{1}{x}}$。

解法1：$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^{2}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

解法2：$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{\mathrm{e}\cdot x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

【例题16】求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$。

解：由于 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\cot x)}$，

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\csc^2 x}{\cot x\cdot\dfrac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\cos x\cdot\sin x} = -1$，

所以：原式 $= e^{-1}$。

【例题17】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$。

解：由于 $(e^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln(e^{\frac{1}{x}}-1)}$，

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{(e^{\frac{1}{x}}-1)\cdot\frac{1}{x}}=-1,$$

所以：原式 $=e^{-1}$。

【例题18】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$。

解：由于 $\sqrt[n]{n}-1=n^{\frac{1}{n}}-1=e^{\frac{1}{n}\ln n}-1\sim\dfrac{\ln n}{n}$，所以：原式 $=1$。

注意：不能直接对数列使用洛必达法则！

如果需要使用洛必达法则的话，应先把 n 改为 x，

$n\to\infty$ 改为 $x\to+\infty$ 然后再使用洛必达法则。

【例题19】求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\ln[1+(x-1)]\cdot\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)\cdot\ln(1-x)=0$。

【例题20】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}]$。

解：由于 $\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{\mathrm{e}}=x\cdot[\dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}]=x\cdot\dfrac{\mathrm{e}-(1+\frac{1}{x})^x}{\mathrm{e}\cdot(1+\frac{1}{x})^x}$，

故，原式 $=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot[\mathrm{e}-(1+\dfrac{1}{x})^x]$

由例题14知，原式 $=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$。

4.2.4. 导函数的极限

定理4.2.4 设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上连续，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上可导，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右导数存在，且 $f'_+(x_0)=A$，即 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$。

设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上连续，在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上可导，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=A$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左导数存在，且 $f'_-(x_0)=A$，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$。

定理4.2.4 证明:

由洛必达法则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$，证毕。

推论: 设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内连续，在 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内可导，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，且

$f'(x_0)=A$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 。

注意: 当 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可能**可导。

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处一定不可导!

对于函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，

在点 $x=0$ 处连续且可导，但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在。

进一步有 $f(x)=\begin{cases} |x|^k\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，

当 $k>0$ 时，函数 $f(x)$ 连续；

当 $k>1$ 时，函数 $f(x)$ 可导；注意：$k=1$ 时如何？

当 $k>2$ 时，函数 $f(x)$ 的导函数连续。注意：$k=2$ 时如何？

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！