高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第四章 微分中值定理及导数应用

上一章我们学习了导数及微分的概念及计算，利用导数及微分解决了一些具体问题，本章将进一步研究导数的应用，如函数的单调性、凹凸性及最大值、最小值问题等，我们先引入微分中值定理及泰勒定理，为研究函数的整体性质提供有力保障。

4.1 微分中值定理

4.1.1. 罗尔(Rolle)定理

1. 定理4.1.1 费马(Fermat)引理：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在内点 c 处取得最大值(或最小值)，且 $f(x)$ 在点 c 处可导，则 $f'(c)=0$。

证明：设函数 $f(x)$ 在点 c 处取得最大值，

则 $f'_-(c)=\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$; $f'_+(c)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$;

由于 $f(x)$ 在点 c 处可导，所以 $f'_-(c)=f'_+(c)$，故 $f'(c)=0$，证毕。

2. 定理4.1.2 达布(Darboux)定理：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)\cdot f'(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$。

证明：不妨设 $f'(a)<0, f'(b)>0$，由 $f'(a)<0$, 知

$$f'(a)=f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0,$$

由极限定义知, $\exists\delta_1>0$，当 $a<x<a+\delta_1$ 时，有 $f(x)<f(a)$;

同理, $\exists\delta_2>0$，当 $b-\delta_2<x<b$ 时，有 $f(x)<f(b)$,

又函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导一定连续，故最小值一定在内点 $x=\xi\in(a,b)$ 处取得，由费马引理知 $f'(\xi)=0$, 证毕。

3. 定理4.1.3 罗尔(Rolle)定理：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证明：由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故有最大值 M 和最小值 m，

使得 $m\le f(x)\le M,\forall x\in[a,b]$，又 $f(a)=f(b)$，所以，

如果 $M=m$，则 $f(x)\equiv C, f'(x)=0, \xi$ 可取 (a,b) 内任何值；

如果 $M>m$，则 M,m 中至少有一个在内点 $x=\xi\in(a,b)$ 处取得，

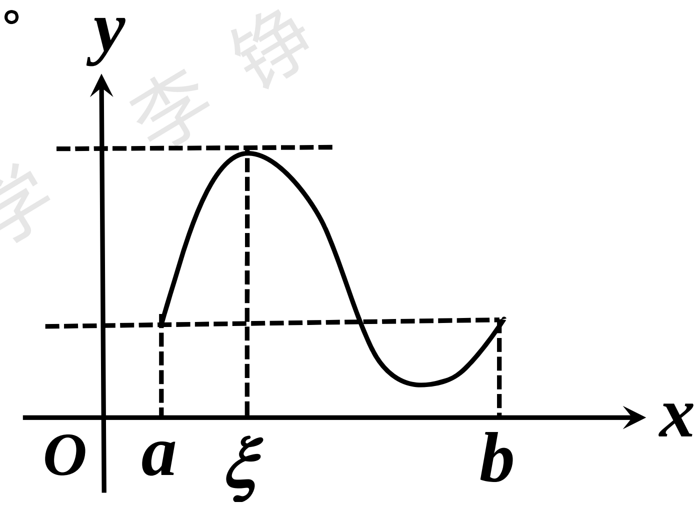
$f(x)$ 在 (a,b) 上可导，由费马引理知 $f'(\xi)=0$，证毕。

- 罗尔定理的三个条件：

  (1) 闭区间上连续, (2) 开区间上可导, (3) 端点函数值相等。

  结论：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

- 罗尔(Rolle)定理的几何意义



- 注：罗尔定理的条件只是充分条件。

【例题1】设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$, 证明：$\exists\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$。

证明：函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，故有最大值 M 和最小值 m，

使得 $m\le f(x)\le M, \forall x\in[0,2]$，所以, $m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\le M$,

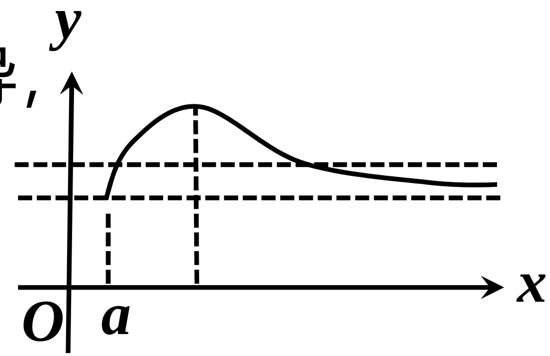
由介值定理推论知 $\exists\eta\in[0,2]$, 使得 $f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$,

由罗尔定理可得：$\exists\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$，证毕。

4. 罗尔(Rolle)定理的推广

- 广义罗尔定理1：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$，则 $\exists\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$。



证明：若 $\forall x\in[a,+\infty), f(x)\equiv f(a)$，则结论显然成立；

不妨设 $c>a, f(c)>f(a)$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$，对 $\varepsilon_0=\dfrac{f(c)-f(a)}{2}$，

$\exists X>c$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon_0$，故 $f(X+1)<f(a)+\varepsilon_0<f(c)$，

所以 $f(x)$ 的最大值在内点 $x=\xi\in(a,X+1)\subset(a,+\infty)$ 处取得，

由费马引理知 $f'(\xi)=0$，证毕。

- 广义罗尔定理2：

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$，

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证明：作函数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), a<x<b \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x), x=a \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x), x=b \end{cases}$$

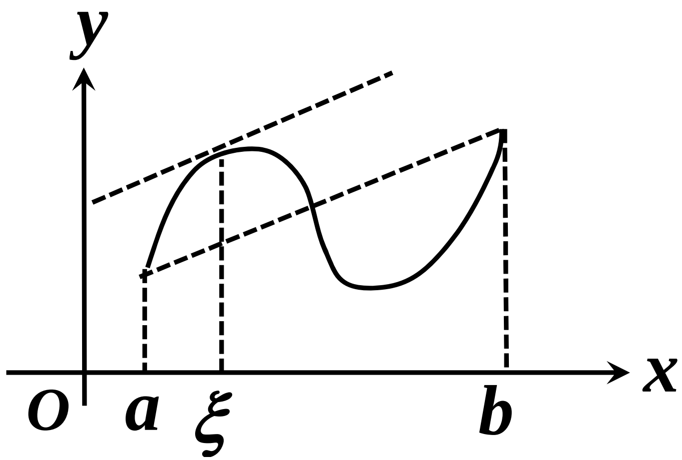
则函数 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，证毕。

4.1.2. 拉格朗日(Lagrange)定理

1. 定理4.1.4 拉格朗日(Lagrange)定理：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$。



- 拉格朗日(Lagrangd)定理的几何意义

当 $f(a)=f(b)$ 时，

拉格朗日定理即为罗尔定理。

拉格朗日定理的证明：

证明思路：能否找到一个满足罗尔定理条件的函数 $F(x)$

使得 $F'(\xi)=0$ 为我们要的结果！

即：$F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, F(x)=?$

这样的函数称为辅助函数，问题：如何找辅助函数？

证明：作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$,

由罗尔定理可得：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，证毕。

2. 拉格朗日(Lagrange)定理的其它形式

由于$a<\xi<b$, 记 $\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$, 则 $0<\theta<1$, $\xi=a+\theta\cdot(b-a)$,

则拉格朗日定理可表示为:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a),a<\xi<b$$

或 $f(b)-f(a)=f'[a+\theta\cdot(b-a)]\cdot(b-a),0<\theta<1,$

也可表示为: $\Delta y=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x,0<\theta<1,$

因此，拉格朗日定理又称为有限增量公式。

注意：微分应用 $\Delta y\approx f'(x)\cdot\Delta x$, 要求: $|\Delta x|$ 很小!

3. 拉格朗日(Lagrange)定理的推论

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)\equiv C$ 常数。

【例题2】证明：$f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加。

证明：由于 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0,$

$\forall x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$, 当 $x_1<x_2$ 时，由拉格朗日定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1)>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加。

4.1.3. 柯西(Cauchy)定理

定理4.1.5 柯西(Cauchy)定理：

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$，则 $\exists \xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

证明：作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)]$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理可得：$\exists \xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，证毕。

注意：当 $g(x)=x$ 时，柯西定理即为拉格朗日定理。

【例题3】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

证明: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}$。

证明：思想方法：从复杂部分入手

先考虑右边，发现没有一个函数的导数为 $\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$,

考虑应用柯西定理 $f(x),g(x)=x^2$, 则 $\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}=\left.\dfrac{[f(x)]'}{(x^2)'}\right|_{x=\eta}$,

即 $\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{1}{a+b}\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},(a<\eta<b)$

对于函数 $f(x)$ 应用拉格朗日定理得：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),(a<\xi<b)$ 证毕。

【例题4】设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$,

证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

证明：函数在 $[a,b]$ 上可导，一定满足闭区间连续，开区间可导。

作辅助函数 $F(x)=[f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(x)]$

易验证 $F(x)$ 满足罗尔定理条件，

而 $F'(x)=f'(x)\cdot[g(b)-g(x)]+[f(x)-f(a)]\cdot[-g'(x)]$,

由罗尔定理可得：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$,

即 $f'(\xi)\cdot[g(b)-g(\xi)]-[f(\xi)-f(a)]\cdot g'(\xi)=0$，证毕。

【例题5】设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，

且 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$。

问题：没有一个函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f'(x)+f(x)\cdot g'(x)$，怎么办？

考虑：如果存在函数 $u(x)\neq 0$，使得 $[f'(x)+f(x)\cdot g'(x)]\cdot u(x)=0$，

也可以，这样的 $u(x)$ 能够找到吗？

注意到 $[f(x)\cdot u(x)]'=f'(x)\cdot u(x)+f(x)\cdot u'(x)$

只需 $u'(x)=u(x)\cdot g'(x)$ 即可！

【例题5】证明：

作辅助函数 $F(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$，

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，

而 $F'(x)=f'(x)\cdot e^{g(x)}+f(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)=[f'(x)+f(x)\cdot g'(x)]\cdot e^{g(x)}$

由罗尔定理可得：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$，证毕。

注意：例题5可作为常用结论。

【例题6】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，证明：$\forall\lambda\in\mathbf{R},\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda\cdot[f(\xi)-\xi]=1$。

证明：即证：$[f(x)-x]'+(-\lambda)\cdot[f(x)-x]\Big|_{x=\xi}=0$，

由例题5知作辅助函数 $F(x)=[f(x)-x]\cdot e^{-\lambda x}$，

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

而 $F(0)=0, F(1)=-e^{-\lambda}$，$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\lambda}$，问题：没有两点函数值相等。

注意到 $F(1)=-e^{-\lambda}<0, F(\frac{1}{2})>0$，由介值定理 $\exists\eta\in(\frac{1}{2},1), F(\eta)=0$，

由罗尔定理可得：$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，证毕。

立志成才 报国裕民

【例题7】证明：当 $b>a>\mathrm{e}$ 时，$a^b>b^a$。

证明：即证 $b\ln a>a\ln b$，作函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

由于$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，有 $f'(x)<0$，

所以，由拉格朗日定理，可得 $f(a)>f(b)$，

即当 $b>a>\mathrm{e}$ 时，$a^b>b^a$，证毕。

【例题8】证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1$。

证明：作函数 $f(x)=\ln(1+x)$，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日定理，得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi},(0<\xi<x)$$

由于 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，故当 $x>0$ 时，有 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1$，证毕。

注意：如果考虑函数 $f(x)=\ln x$，在区间 $[1,1+x]$ 讨论也行。

例题7 给出了利用导函数的单调性由拉格朗日定理证明

双向不等式的一个常用方法。

【例题9】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$f(a)=f(b)=1$，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta}\cdot[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$。

证明：思想方法：从复杂部分入手

先考虑左边，$e^{\eta}\cdot[f(\eta)+f'(\eta)]=[e^{x}\cdot f(x)]'\big|_{x=\eta}$，

作函数 $F(x)=e^{x}\cdot f(x)$，由拉格朗日定理得：

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta),(a<\eta<b),$$

即：$e^{\eta}\cdot[f(\eta)+f'(\eta)]=\dfrac{e^{b}\cdot f(b)-e^{a}\cdot f(a)}{b-a}=\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$，

对函数 $g(x)=e^{x}$ 应用拉格朗日定理得：$\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}=e^{\xi}$，证毕。

【例题10】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{2}$，证明：$\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$。

证明：即证：$f'(\xi)-\xi+f'(\eta)-\eta=0$，

作函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，分别在 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 应用拉格朗日定理

得：$F(\frac{1}{2})-F(0)=F'(\xi)\cdot\frac{1}{2},(0<\xi<\frac{1}{2})$，$F(1)-F(\frac{1}{2})=F'(\eta)\cdot\frac{1}{2},(\frac{1}{2}<\eta<1)$，

而 $F(0)=0$，$F(1)=0$，所以，相加得：$F'(\xi)+F'(\eta)=0$，

即：$f'(\xi)-\xi+f'(\eta)-\eta=0$，其中 $\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$，证毕。

【例题11】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:（1) $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) $\exists\eta,\varsigma\in(0,1),\eta\neq\varsigma$, 使得 $f'(\eta)\cdot f'(\varsigma)=1$。

证明: (1) 作函数 $F(x)=f(x)+x-1$, 则 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$,

而函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，由介值定理知:

$\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$ 即: $f(\xi)=1-\xi$;

(2)对函数 $f(x)$ 分别在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 应用拉格朗日定理

得: $f(\xi)-f(0)=f'(\eta)\cdot\xi,(0<\eta<\xi)$, $f(1)-f(\xi)=f'(\varsigma)\cdot(1-\xi),(\xi<\varsigma<1)$,

其中 $f(0)=0, f(1)=1, f(\xi)=1-\xi$, 故 $f'(\eta)\cdot f'(\varsigma)=1$，证毕。

【例题12】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$,

证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

证明思路：需证明 $f''(\xi)(1-\xi)-2f'(\xi)=0$,

作函数 $F(x)=f'(x)(1-x)-f(x)$, 则 $F'(x)=f''(x)(1-x)-2f'(x)$

如果函数 $F(x)$ 满足罗尔定理条件就可以了,

而 $F(1)=0, F(0)=f'(0)$? 问题：怎么办?

先证明 $\exists\eta\in(0,1), F(\eta)=0$, 即先证明 $f'(\eta)(1-\eta)-f(\eta)=0$,

作辅助函数 $G(x)=f(x)(1-x)$,

【例题12】证法1：

作辅助函数 $G(x)=f(x)(1-x)$，

由已知条件得 $G(0)=0, G(1)=0$，由罗尔定理知，

$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $G'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)(1-\eta)-f(\eta)=0$，

作函数 $F(x)=f'(x)(1-x)-f(x)$，则 $F(1)=0, F(\eta)=0$，

满足罗尔定理条件，所以 $\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1), F'(\xi)=0$，

而 $F'(x)=f''(x)(1-x)-2f'(x)$，故 $f''(\xi)(1-\xi)-2f'(\xi)=0$，

证毕。

【例题12】证法2:

需证明 $f''(\xi)-\dfrac{2}{1-\xi}f'(\xi)=0$,

利用例题5结论, 作辅助函数

$$H(x)=f'(x)\cdot e^{2\ln(1-x)}=(1-x)^2\cdot f'(x),$$

因为 $f(0)=f(1)=0$, 由罗尔定理知, $\exists\eta\in(0,1)$, $f'(\eta)=0$,

所以 $H(1)=0, H(\eta)=0$, 由罗尔定理得

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得 $H'(\xi)=0$, 即 $f''(\xi)(1-\xi)^2-2(1-\xi)f'(\xi)=0$,

故 $f''(\xi)(1-\xi)-2f'(\xi)=0$, 证毕。

【例题13】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

证明: $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi)$。

证法1：此题从左或右边出发都可以，先考虑右边 $\xi f'(\xi)-f(\xi)$,

由于 $[x\cdot f(x)]'=xf'(x)+f(x)$, $[\dfrac{f(x)}{x}]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,

设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}, G(x)=-\dfrac{1}{x}$, 则 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=\left.\dfrac{[F(x)]'}{[G(x)]'}\right|_{x=\xi}$,

因此，$\xi f'(\xi)-f(\xi)=\dfrac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{(-\dfrac{1}{b})-(-\dfrac{1}{a})}=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$, $(a<\xi<b)$，证毕。

【例题13】

证法2：如果从左边出发，考虑 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$，

由于 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\dfrac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}=\dfrac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{(-\dfrac{1}{b})-(-\dfrac{1}{a})}$，

应该也能够想到设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x},G(x)=-\dfrac{1}{x}$，应用柯西定理，

以下同证法1，略，证毕。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！