高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

3.4 高阶导数

3.4.1 高阶导数的定义

1. 二阶导数的定义

设函数$y=f(x)$在任意点x的导数$f'(x)$仍是x的函数，

如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为函数

$y=f(x)$在点x的二阶导数，记作：$f''(x)$，

二阶导数也可记作：y'' 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$。

即：导数的导数称为二阶导数。 注意：$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)$。

2. n 阶导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 存在，如果极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$

在点 x 的 n 阶导数，记作：$f^{(n)}(x)$，

n 阶导数也可记作：$y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$。

为了形式上的统一，定义 $y^{(0)}=y$ 或 $f^{(0)}(x)=f(x)$，

把 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 一阶导数。

- 二阶及二阶以上阶导数统称为高阶导数。

若 $f^{(n)}(x)$ 在区间 I 上连续，则称 $f(x)$ 在 I 上 n 阶连续可导，记作：$f \in C^{(n)}(I)$。

【例题1】设 $y = x^2 \ln x$，求 y'', y'''。

解：$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x,$

$y'' = 2\ln x + 2x \cdot \dfrac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3,$

$y''' = \dfrac{2}{x}$。

【例题2】设 $y=x^{\mu}$，求 $y^{(n)}$。

解：$y'=\mu x^{\mu-1}, y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}, \cdots$

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}。$$

特别：$(x^n)^{(n)}=n!$。

常用公式1：$(\frac{1}{x})^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$。

常用公式2：$(\ln x)^{(n)}=(\frac{1}{x})^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$。

【例题3】设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$。

解：$y'=\cos x, y''=-\sin x, y'''=-\cos x, y^{(4)}=\sin x,$

问题：分别讨论 $n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ 吗?

注意到 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),\cdots$$

常用公式3：$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$

同理得

常用公式4：$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$。

【例题4】设 $y=\ln(x^2+x-2)$，求 $y^{(n)}$。

解：$y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$，$y''=\dfrac{2(x^2+x-2)-(2x+1)^2}{(x^2+x-2)^2}=\dfrac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2}$，

问题：怎么办？再求导吗？

注意到：$y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$，

利用公式 $(\dfrac{1}{x})^{(n)}=(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{x^{n+1}}$，

得：$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(x+2)^n}+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(x-1)^n}$。

3.4.2. 高阶导数的运算法则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

2. 莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} \cdot v'' + \\ + \cdots + C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} + u \cdot v^{(n)}$$

或 $$[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x)$$

【例题5】设 $y=x^2\sin x$，求 $y^{(100)}$。

解：注意到，$(x^2)'=2x,(x^2)''=2,(x^2)'''=0,$

所以，由莱布尼兹公式可得：

$$y^{(100)}=x^2\cdot(\sin x)^{(100)}+C_{100}^1\cdot(x^2)'\cdot(\sin x)^{(99)}+C_{100}^2\cdot(x^2)''\cdot(\sin x)^{(98)}$$

$$=x^2\cdot\sin(x+50\pi)+100\cdot 2x\cdot\sin(x+\frac{99}{2}\pi)+\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 2\cdot\sin(x+49\pi)$$

$$=x^2\cdot\sin x-200x\cdot\cos x-9900\cdot\sin x$$ 。

【例题6】设 $y=\sin x\cos 2x$，求 $y^{(n)}$。

问题：直接令 $u=\sin x,v=\cos 2x$ 然后利用莱布尼兹公式吗？

【例题6】解：

利用三角函数积化和差公式 $\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$

所以：$y^{(n)}=\frac{1}{2}[(\sin 3x)^{(n)}-(\sin x)^{(n)}]$

$$=\frac{1}{2}[3^n\sin(3x+\frac{n}{2}\pi)-\sin(x+\frac{n}{2}\pi)]。$$

【例题7】设 $y=e^{ax}\sin bx$，求 $y^{(n)}$。

解：$y'=a\cdot e^{ax}\cdot\sin bx+e^{ax}\cdot b\cdot\cos bx=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx)$

$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

因此，$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+n\varphi)$。

立志成才 报国裕民

【例题8】设 $f(x)=(x^2-1)^n\cos\dfrac{\pi}{4}x$，求 $f^{(n)}(1)$。

解：记 $f(x)=(x-1)^n g(x),\ g(x)=(x+1)^n\cos\dfrac{\pi}{4}x$，

而 $[(x-1)^n]^{(k)}$ 在 $x=1$ 处，当 $k\neq n$ 时，均为零，

当 $k=n$ 时，$[(x-1)^n]^{(n)}=n!$，所以 $f^{(n)}(1)=n!\cdot g(1)=n!\cdot 2^n\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

【例题9】设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$。

解：$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\ f'(0)=1,\ \ f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(0)=0,$

问题：怎么办？

【例题9】解(续):

$$(1+x^2)\cdot f'(x)=1,$$

上式两边求 $(n-1)$ 导数，得

$$(1+x^2)\cdot f^{(n)}(x)+(n-1)\cdot(2x)\cdot f^{(n-1)}(x)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 2\cdot f^{(n-2)}(x)=0,$$

用 $x=0$ 代入上式，得 $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0),$

而 $f'(0)=1, f''(0)=0,$ 因此，$f^{(2k)}(0)=0,$

$f^{(2k+1)}(0)=-(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0)=(-1)^k\cdot(2k)!$。

问题：设 $f(x)=\arcsin x$，如何求 $f^{(n)}(0)=0$?

3.4.3 隐函数、参数方程及反函数的二阶导数

1. 隐导数的二阶导数

通过例题来说明如何求隐函数的二阶导数。

【例题10】设方程 $e^y + xy = e$ 确定了隐函数 $y = y(x)$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$。

解：当 $x=0$ 由方程知 $y(0)=1$

方程两边对 x 求导数，把 y 看成 x 的函数，

得 $e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \cdots\cdots(*)$ 由 $x=0, y(0)=1$ 得 $y'(0) = -e^{-1}$，

对 (*) 式求导数，得 $e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' + y' + y' + x \cdot y'' = 0$

由 $x=0, y(0)=1, y'(0)=-e^{-1}$ 得 $y''(0) = e^{-2}$。

2. 参数方程所确定函数的二阶导数

设参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，由于 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，

所以 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}。$$

【例题11】求由参数方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 确定的函数的二阶导数。

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\cot\dfrac{t}{2}\right)}{a(1-\cos t)}=\frac{-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{t}{2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a}\csc^4\frac{t}{2}。$$

立志成才 报国裕民

【例题12】设 $t=\tan x$，变换方程

$$\cos^4 x\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+2\cos^2 x\cdot(1-\sin x\cos x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\sec^2 x。$$

解法1：$t=\tan x, x=\arctan t$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos^2 x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\cos^2 x\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2\cos x\sin x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\cos^2 x$$

故方程可变换为：$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=1+t^2$。

【例题12】解法2:

$$t=\tan x,\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(1+t^2)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(1+t^2)\cdot[2t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(1+t^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}]$$

代入原方程整理得: $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=1+t^2$。

3. 反函数的二阶导数

设函数 $x=\varphi(y)$ 是严格单调可导函数 $y=f(x)$ 的反函数,

且 $f'(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\dfrac{1}{f'(x)}$,

进一步有: $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$。

3.5 微分及其应用

微分是微积分学中又一个基本概念，它与导数有着及其密切的关系。

3.5.1. 微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

若 Δy 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 与 Δx 无关，$o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分存在，

把 $A\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作：$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$。

• 微分的定义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分存在，也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，把微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$ 称为 Δy 的线性主部。

3.5.2. 微分与导数的关系

定理： (1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=A$； 即：可微 $\Rightarrow$ 可导

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，且 $A=f'(x_0)$。 即：可导 $\Rightarrow$ 可微

- 微分与导数的关系： 可微 $\Leftrightarrow$ 可导

(1) 证明： 由微分定义 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$,

知 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, 即 $f'(x_0) = A$;

(2) 证明： 设 $f'(x_0) = A$, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$,

由极限与无穷小的关系可得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha\cdot\Delta x = o(\Delta x)$,

故函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微分，且 $A = f(x_0)$。

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分存在时，其微分为：

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f(x_0)\cdot\Delta x\,,$$

任意点 x 处的微分称为函数 $f(x)$ 的微分，记作：$\mathrm{d}\,y$

或 $\mathrm{d}\,f(x)$，即：$\mathrm{d}\,y = f'(x)\Delta\,x$。

为了形式上统一，记 $\Delta\,x = \mathrm{d}\,x$，则 $\mathrm{d}\,y = f'(x)\mathrm{d}\,x$，

或 $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以，导数又可称为微商。

3.5.3. 基本微分表与微分运算法则

1. 基本微分表:

$$\mathrm{d}C=0\ ,\quad \mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

2. 微分运算法则

$$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=[u'(x)\pm v'(x)]\mathrm{d}x=\mathrm{d}[u(x)]\pm \mathrm{d}[v(x)],$$

$$\mathrm{d}[u(x)\cdot v(x)]=[v(x)u'(x)+u(x)v'(x)]\mathrm{d}x=v(x)\cdot \mathrm{d}[u(x)]+u(x)\cdot \mathrm{d}[v(x)]$$

$$\mathrm{d}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{v(x)\mathrm{d}[u(x)]-u(x)\mathrm{d}[v(x)]}{v^2(x)}。$$

- 复合函数的微分运算法则:

设函数 $y=f(u),u=g(x)$ 可微，则复合函数 $y=f[g(x)]$

可微，且 $\mathrm{d}y=[f'(u)\cdot g'(x)]\mathrm{d}x=f'(u)\cdot[g'(x)\cdot \mathrm{d}x]=f'(u)\cdot \mathrm{d}u,$

这个性质称为一阶微分形式不变性。

【例题1】设 $y=\cos(x^3+e^{\frac{1}{x}})$，求 dy。

解：$dy=-\sin(x^3+e^{\frac{1}{x}})\cdot[3x^2+e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})]\cdot dx$。

【例题2】设 $xy=x^3+e^{x-y}-1$，求 dy。

解法1：方程两边对 x 求导，$y+x\cdot y'=3x^2+e^{x-y}\cdot(1-y')$

解得：$y'=\dfrac{3x^2+e^{x-y}-y}{x+e^{x-y}}$，所以有 $dy=\dfrac{3x^2+e^{x-y}-y}{x+e^{x-y}}dx$。

解法2：方程两边直接求微分 $ydx+xdy=3x^2dx+e^{x-y}\cdot(dx-dy)$，

解得：$dy=\dfrac{3x^2+e^{x-y}-y}{x+e^{x-y}}dx$。

由于导数又可称为微商，即 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

所以，导数运算法则可直接看成微分之间的运算：

如：复合函数运算法则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$；

反函数运算法则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$；

参数方程运算法则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$。

【例题3】求 $\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\sin x}{x})}{\mathrm{d}(x^3)}$。

解法1：令 $u=x^3$，则 $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}}$，需要求 $\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\sin\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}})}{\mathrm{d}u}$，

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{\sin\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}})}{\mathrm{d}u}=\frac{\cos\sqrt[3]{u}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot\sqrt[3]{u}-\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot\sin\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u^2}}=\frac{x\cos x-\sin x}{3x^4}。$$

解法2：

直接求微商 $\dfrac{\mathrm{d}(\frac{\sin x}{x})}{\mathrm{d}(x^3)}=\dfrac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x}{3x^2\mathrm{d}x}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{3x^4}$。

3.5.4. 微分的应用

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，由微分定义知

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathrm{d}y\big|_{x_0} + o(\Delta x),$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y\big|_{x_0}$，

即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ 或 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$。

如果取 $x_0=0$，记 $\Delta x = x$，

则当 $|x|$ 很小时，有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$。

- 几个常用的近似等式：

$$\sin x\approx x,\ \ln(1+x)\approx x,\ \mathrm{e}^x\approx 1+x,\ \sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x。(|x|很小)$$

注意：近似等式与等价无穷小的区别。

【例题4】计算 $\sqrt[4]{80}$ 的近似值。

解：$\sqrt[4]{80}=3\cdot\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{81}}\approx 3\cdot[1+4\cdot(-\dfrac{1}{81})]\approx 2.997$。

【例题5】计算 $\sin(31^0)$ 的近似值。

解：$\sin(31^0)=\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{180})\approx\sin\dfrac{\pi}{6}+(\cos\dfrac{\pi}{6})\cdot\dfrac{\pi}{180}\approx 0.515$。

注：随着计算机的发展，微分的近似计算使用较少，

主要问题是精确度不够，常用方法将在下一章中介绍。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！