



高等数学 (I)

高等数学 李铮

主讲教师：李铮





上一次课程内容回顾

高等数学 李铮



立志成才 报国裕民

3.4 高阶导数

3.4.1 高阶导数的定义

1. 二阶导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的导数 $f'(x)$ 仍是 x 的函数,

如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限值为函数

$y = f(x)$ 在点 x 的**二阶导数**, 记作: $f''(x)$,

二阶导数也可记作: y'' 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ 。

即: 导数的导数称为二阶导数。 **注意:** $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right)$ 。

2. n 阶导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 存在, 如果极限

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限值为函数 $y = f(x)$

在点 x 的 n 阶导数, 记作: $f^{(n)}(x)$,

n 阶导数也可记作: $y^{(n)}$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ 。

为了形式上的统一, 定义 $y^{(0)} = y$ 或 $f^{(0)}(x) = f(x)$,

把 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 一阶导数。

3.4 高阶导数



- 二阶及二阶以上阶导数统称为高阶导数。

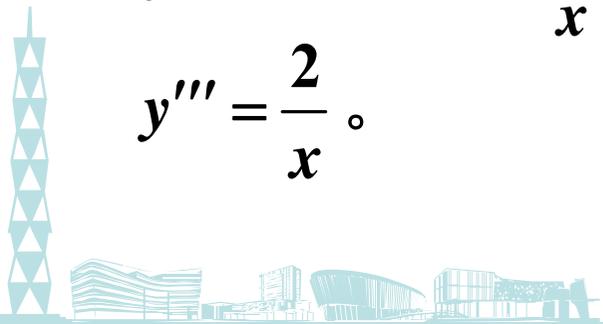
若 $f^{(n)}(x)$ 在区间 I 上连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上 n 阶连续可导, 记作: $f \in C^{(n)}(I)$ 。

【例题1】 设 $y = x^2 \ln x$, 求 y'' , y''' 。

解: $y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x,$

$$y'' = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3,$$

$$y''' = \frac{2}{x}.$$



3.4 高阶导数



【例题2】 设 $y=x^\mu$, 求 $y^{(n)}$ 。

解: $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ...

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}。$$

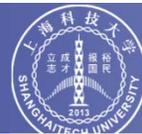
特别: $(x^n)^{(n)} = n!$ 。

常用公式1: $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$ 。

常用公式2: $(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$ 。



3.4 高阶导数



【例题3】 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$ 。

解: $y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{(4)} = \sin x,$

问题: 分别讨论 $n = 4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$ 吗?

注意到 $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$

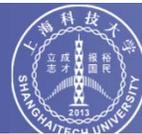
$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}), \dots$$

常用公式3: $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}),$

同理得

常用公式4: $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$

3.4 高阶导数



【例题4】 设 $y = \ln(x^2 + x - 2)$, 求 $y^{(n)}$ 。

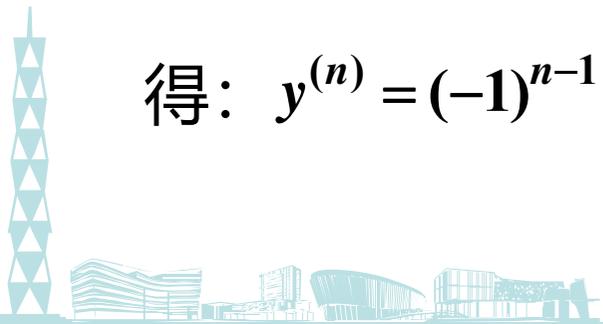
解:
$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x-2}, \quad y'' = \frac{2(x^2+x-2) - (2x+1)^2}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2},$$

问题: 怎么办? 再求导吗?

注意到:
$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1},$$

利用公式
$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}},$$

得:
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x+2)^n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x-1)^n}.$$



3.4 高阶导数



3.4.2. 高阶导数的运算法则

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

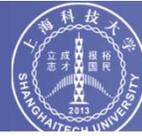
2. 莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} + u \cdot v^{(n)}$$

或 $[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(n-k)}(x) \cdot v^{(k)}(x)$



3.4 高阶导数



【例题5】 设 $y = x^2 \sin x$, 求 $y^{(100)}$ 。

解: 注意到, $(x^2)' = 2x, (x^2)'' = 2, (x^2)''' = 0,$

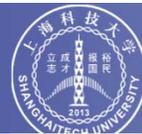
所以, 由莱布尼兹公式可得:

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= x^2 \cdot (\sin x)^{(100)} + C_{100}^1 \cdot (x^2)' \cdot (\sin x)^{(99)} + C_{100}^2 \cdot (x^2)'' \cdot (\sin x)^{(98)} \\ &= x^2 \cdot \sin(x + 50\pi) + 100 \cdot 2x \cdot \sin(x + \frac{99}{2}\pi) + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 \cdot \sin(x + 49\pi) \\ &= x^2 \cdot \sin x - 200x \cdot \cos x - 9900 \cdot \sin x. \end{aligned}$$

【例题6】 设 $y = \sin x \cos 2x$, 求 $y^{(n)}$ 。

问题: 直接令 $u = \sin x, v = \cos 2x$ 然后利用莱布尼兹公式吗?

3.4 高阶导数



【例题6】解：

利用三角函数积化和差公式 $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$

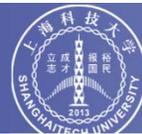
$$\begin{aligned} \text{所以: } y^{(n)} &= \frac{1}{2}[(\sin 3x)^{(n)} - (\sin x)^{(n)}] \\ &= \frac{1}{2}\left[3^n \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right) - \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)\right]. \end{aligned}$$

【例题7】 设 $y = e^{ax} \sin bx$, 求 $y^{(n)}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } y' &= a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot b \cdot \cos bx = \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin bx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos bx \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx + \varphi), \text{ 其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{因此, } y^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx + n\varphi).$$

3.4 高阶导数



【例题8】 设 $f(x) = (x^2 - 1)^n \cos \frac{\pi}{4} x$, 求 $f^{(n)}(1)$ 。

解: 记 $f(x) = (x-1)^n g(x)$, $g(x) = (x+1)^n \cos \frac{\pi}{4} x$,

而 $[(x-1)^n]^{(k)}$ 在 $x=1$ 处, 当 $k \neq n$ 时, 均为零,

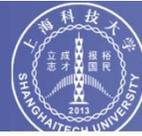
当 $k = n$ 时, $[(x-1)^n]^{(n)} = n!$, 所以 $f^{(n)}(1) = n! \cdot g(1) = n! \cdot 2^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【例题9】 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$ 。

解: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(0) = 0$,

问题: 怎么办?

3.4 高阶导数



【例题9】解(续):

$$(1+x^2) \cdot f'(x) = 1,$$

上式两边求 $(n-1)$ 阶导数, 得

$$(1+x^2) \cdot f^{(n)}(x) + (n-1) \cdot (2x) \cdot f^{(n-1)}(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-2)}(x) = 0,$$

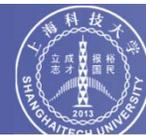
用 $x=0$ 代入上式, 得 $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$,

而 $f'(0) = 1, f''(0) = 0$, 因此, $f^{(2k)}(0) = 0$,

$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k)(2k-1)f^{(2k-1)}(0) = (-1)^k \cdot (2k)!.$$

问题: 设 $f(x) = \arcsin x$, 如何求 $f^{(n)}(0) = 0$?

3.4 高阶导数



3.4.3 隐函数、参数方程及反函数的二阶导数

1. 隐函数的二阶导数

通过例题来说明如何求隐函数的二阶导数。

【例题10】 设方程 $e^y + xy = e$ 确定了隐函数 $y = y(x)$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 。

解: 当 $x = 0$ 由方程知 $y(0) = 1$

方程两边对 x 求导数, 把 y 看成 x 的函数,

得 $e^y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \cdots \cdots (*)$ 由 $x = 0, y(0) = 1$ 得 $y'(0) = -e^{-1}$,

对 $(*)$ 式求导数, 得 $e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' + y' + y' + x \cdot y'' = 0$

由 $x = 0, y(0) = 1, y'(0) = -e^{-1}$ 得 $y''(0) = e^{-2}$ 。

3.4 高阶导数



2. 参数方程所确定函数的二阶导数

设参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,

$$\text{所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t) \cdot \varphi'(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

【例题11】 求由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 确定的函数的二阶导数。

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\cot \frac{t}{2} \right)}{a(1 - \cos t)} = \frac{-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{t}{2}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a} \csc^4 \frac{t}{2}.$

3.4 高阶导数



【例题12】 设 $t = \tan x$, 变换方程

$$\cos^4 x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \cos^2 x \cdot (1 - \sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = \sec^2 x .$$

解法1: $t = \tan x, x = \arctan t,$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \left(\cos^2 x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \cos x \sin x \cdot \frac{dy}{dx} \right) \cdot \cos^2 x$$

故方程可变换为: $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 1 + t^2 .$

3.4 高阶导数



【例题12】解法2:

$$t = \tan x, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = (1+t^2) \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \frac{dx}{dt} = (1+t^2) \cdot \left[2t \frac{dy}{dt} + (1+t^2) \frac{d^2y}{dt^2} \right]$$

代入原方程整理得: $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 1 + t^2$ 。



3.4 高阶导数



3. 反函数的二阶导数

设函数 $x = \varphi(y)$ 是严格单调可导函数 $y = f(x)$ 的反函数,

且 $f'(x) \neq 0$, 则
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)},$$

进一步有:
$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dy} \right)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$





3.5 微分及其应用

3.5 微分及其应用

微分是微积分学中又一个基本概念，它与导数有着及其密切的关系。

3.5.1. 微分的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ，

若 Δy 可以表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ，其中 A 与 Δx 无关， $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分存在，

把 $A\Delta x$ 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作： $dy|_{x=x_0}$ 。

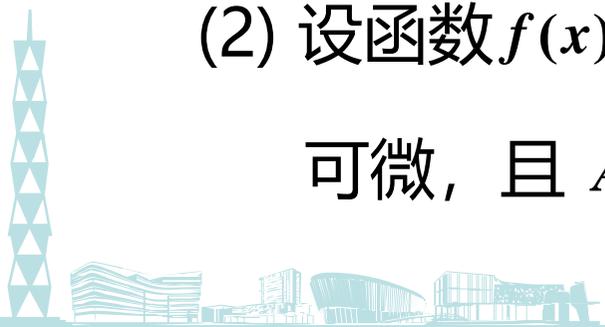
• 微分的定义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分存在, 也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 把微分 $dy|_{x=x_0} = A\Delta x$ 称为 Δy 的线性主部。

3.5.2. 微分与导数的关系

定理: (1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = A$; 即: **可微 \Rightarrow 可导**

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 且 $A = f'(x_0)$ 。 即: **可导 \Rightarrow 可微**





3.5 微分及其应用

- 微分与导数的关系：可微 \Leftrightarrow 可导

(1) 证明：由微分定义 $\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x)$,

$$\text{知 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A, \text{ 即 } f'(x_0) = A;$$

(2) 证明：设 $f'(x_0) = A$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$,

由极限与无穷小的关系可得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

$$\text{其中 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \Delta x = o(\Delta x),$$

故函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微分, 且 $A = f'(x_0)$ 。





3.5 微分及其应用

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处微分存在时，其微分为：

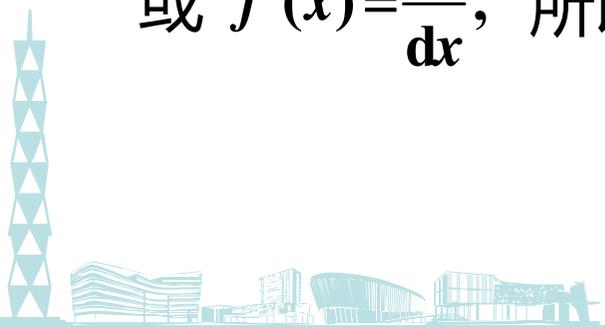
$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

任意点 x 处的微分称为函数 $f(x)$ 的微分，记作： dy

或 $df(x)$ ，即： $dy = f'(x)\Delta x$ 。

为了形式上统一，记 $\Delta x = dx$ ，则 $dy = f'(x)dx$ ，

或 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ，所以，**导数**又可称为**微商**。





3.5 微分及其应用

3.5.3. 基本微分表与微分运算法则

1. 基本微分表:

$$dC = 0, \quad d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx,$$

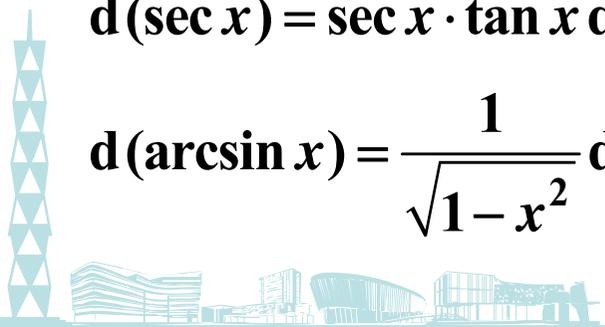
$$d(a^x) = a^x \ln a dx, \quad d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx,$$

$$d(\sin x) = \cos x dx, \quad d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx, \quad d(\cot x) = -\csc^2 x dx,$$

$$d(\sec x) = \sec x \cdot \tan x dx, \quad d(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x dx,$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx,$$



2. 微分运算法则

$$d[u(x) \pm v(x)] = [u'(x) \pm v'(x)]dx = d[u(x)] \pm d[v(x)],$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = [v(x)u'(x) + u(x)v'(x)]dx = v(x) \cdot d[u(x)] + u(x) \cdot d[v(x)]$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}dx = \frac{v(x)d[u(x)] - u(x)d[v(x)]}{v^2(x)}.$$

• 复合函数的微分运算法则:

设函数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 可微, 则复合函数 $y = f[g(x)]$

可微, 且 $dy = [f'(u) \cdot g'(x)]dx = f'(u) \cdot [g'(x) \cdot dx] = f'(u) \cdot du$,

这个性质称为**一阶微分形式不变性**。



3.5 微分及其应用

【例题1】 设 $y = \cos(x^3 + e^x)$, 求 dy 。

解: $dy = -\sin(x^3 + e^x) \cdot [3x^2 + e^x \cdot (-\frac{1}{x^2})] \cdot dx$ 。

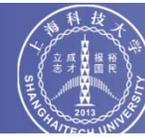
【例题2】 设 $xy = x^3 + e^{x-y} - 1$, 求 dy 。

解法1: 方程两边对 x 求导, $y + x \cdot y' = 3x^2 + e^{x-y} \cdot (1 - y')$

解得: $y' = \frac{3x^2 + e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}}$, 所以有 $dy = \frac{3x^2 + e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}} dx$ 。

解法2: 方程两边直接求微分 $ydx + xdy = 3x^2 dx + e^{x-y} \cdot (dx - dy)$,

解得: $dy = \frac{3x^2 + e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}} dx$ 。



3.5 微分及其应用

由于导数又可称为**微商**，即 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ，

所以，导数运算法则可直接看成微分之间的运算：

如：复合函数运算法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ；

反函数运算法则 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ；

参数方程运算法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 。



3.5 微分及其应用



【例题3】 求 $\frac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^3)}$ 。

解法1: 令 $u = x^3$, 则 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}}$, 需要求 $\frac{d(\frac{\sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}})}{du}$,

$$\frac{d(\frac{\sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u}})}{du} = \frac{\cos \sqrt[3]{u} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot \sqrt[3]{u} - \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot \sin \sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{u^2}} = \frac{x \cos x - \sin x}{3x^4}。$$

解法2:

直接求微商 $\frac{d(\frac{\sin x}{x})}{d(x^3)} = \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx}{3x^2 dx} = \frac{x \cos x - \sin x}{3x^4}。$



3.5 微分及其应用

3.5.4. 微分的应用

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 由微分定义知

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \mathbf{dy}|_{x_0} + o(\Delta x),$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx \mathbf{dy}|_{x_0}$,

即 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ 或 $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ 。

如果取 $x_0 = 0$, 记 $\Delta x = x$,

则当 $|x|$ 很小时, 有 $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ 。

• 几个常用的近似等式:

$$\sin x \approx x, \ln(1+x) \approx x, e^x \approx 1+x, \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x. (|x| \text{ 很小})$$



3.5 微分及其应用

注意：近似等式与等价无穷小的区别。

【例题4】 计算 $\sqrt[4]{80}$ 的近似值。

解： $\sqrt[4]{80} = 3 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{81}} \approx 3 \cdot [1 + 4 \cdot (-\frac{1}{81})] \approx 2.997$ 。

【例题5】 计算 $\sin(31^\circ)$ 的近似值。

解： $\sin(31^\circ) = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}) \approx \sin \frac{\pi}{6} + (\cos \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.515$ 。

注： 随着计算机的发展，微分的近似计算使用较少，
主要问题是精确度不够，常用方法将在下一章中介绍。



本次课程内容小结

下次课程内容预告

高等数学 李铮





谢谢!

高等数学 李铮

