高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

3.2 初等函数的导数

由于初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合后能够用一个公式表示的函数，所以要解决初等函数的导数，需要解决下列问题：

基本初等函数的导数；

函数和、差、积、商的导数；

复合函数与反函数的导数。

3.2.1 基本初等函数的导数

函数 $f(x)$ 在任意点 x 的导数，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\text{。}$$

- 函数 a^x 的导数

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a\ ,$$

- 函数 $\ln x$ 的导数

$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{1}{x}\Delta x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ ,$$

- 函数 $\sin x$ 的导数

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x\ ,$$

同理，可得 $(\cos x)' = -\sin x$。

3.2.2 导数的四则运算法则

- 定理1

设函数 $u(x), v(x)$ 在任意点 x 可导，则

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

(2) $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

(3) $[\dfrac{u(x)}{v(x)}]' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$。

证明： (1) 直接由导数定义可证得，略。

- 定理1 证明(续):

(2) 设 $y=u(x)\cdot v(x)$，则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$$

由于函数可导一定连续，因此

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$，

(3) 类似(2)可证得（略）。

【例题1】设 $y=\tan x$，求 y'。

解：$y'=(\dfrac{\sin x}{\cos x})'=\dfrac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$。

同理可得：$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$，

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$，$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$。

【例题2】设 $y=\dfrac{\sin x\cdot\ln x}{e^x-x^3}$，求 y'。

解：$y'=\dfrac{(\cos x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\sin x)\cdot(e^x-x^3)-(\sin x\cdot\ln x)\cdot(e^x-3x^2)}{(e^x-x^3)^2}$。

【例题3】设 $y=x^5\cdot a^x\cdot\csc x$，求 y'。

解：$y'=(x^5\cdot a^x)'\cdot\csc x+(x^5\cdot a^x)\cdot(\csc x)'$

$$=5x^4\cdot a^x\cdot\csc x+x^5\cdot a^x\cdot\ln a\cdot\csc x+x^5\cdot a^x\cdot(-\csc x\cdot\cot x)。$$

注意：进一步有 $(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'$。

【例题4】设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 3^x+\frac{1}{2}, & x\le 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

解：当 $x<0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 3^x\cdot\ln 3$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=-\sin x$，

在 $x=0$ 处，由于 $f(0^+)=1, f(0^-)=1$，所以，函数 $f(x)$ 连续，

【例题4】解(续):

而 $$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\cos x-1}{x}=0,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\frac{1}{2}\cdot 3^{x}+\frac{1}{2}-1}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^{-}}\frac{3^{x}-1}{x}=\frac{1}{2}\ln 3,$$

所以，在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 不可导，

故 $$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 3^{x}\cdot\ln 3, & x<0\\ -\sin x, & x>0\end{cases}$$ 。

3.2.3 复合函数与反函数的导数

1. 复合函数的导数

定理2：设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$

在对应点 $u[u=\varphi(x)]$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$

在点 x 处可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$。

- 复合函数求导法则称为链式法则。

定理2：证明

函数 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，则有 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$,

由极限与无穷小的关系知：

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u)\Rightarrow \Delta y=f'(u)\cdot\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u$$

其中 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$, 补充定义 $\alpha(0)=0$,

则有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=[f'(u)+\alpha(\Delta u)]\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$,

又由函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta u\to 0$

故 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$，证毕。

【例题5】设 $y=(\sin x)^2$，求 y'。

解：设 $y=u^2, u=\sin x$，

则 $y'=(u^2)'\cdot(\sin x)'=2u\cdot\cos x=2\sin x\cdot\cos x$。

注意：$(x^\mu)'=(e^{\mu\ln x})'=e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=x^\mu\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{x}=\mu\cdot x^{\mu-1}$，

当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$。

【例题6】设 $y=\ln[\tan(2^{\sqrt{x}})]$，求 y'。

解：$$y'=\frac{1}{\tan(2^{\sqrt{x}})}\cdot[\tan(2^{\sqrt{x}})]'=\frac{1}{\tan(2^{\sqrt{x}})}\cdot\sec^2(2^{\sqrt{x}})\cdot(2^{\sqrt{x}})'$$

$$=\frac{2}{\sin(2\cdot 2^{\sqrt{x}})}\cdot 2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2\cdot(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sin(2^{\sqrt{x}+1})}\cdot 2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$。

【例题7】设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'。

解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(2x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$。

【例题8】设 $f(x)$ 可导，求 $y=f(\cot^2 x)$ 的导数。

解：$\dfrac{dy}{dx}=f'(u)\cdot(\cot^2 x)'=f'(\cot^2 x)\cdot 2\cot x\cdot(-\csc^2 x)$。

注意：区分 $f'(x)$、$[f(x)]'$；$f'(a)$、$[f(a)]'$；$f'[\varphi(x)]$、$\{f[\varphi(x)]\}'$；的异同。

2. 反函数的导数

定理3: 设函数 $y=f(x)$ 是严格单调可导函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数，

且 $\varphi'(y)\neq 0$，则 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}。$$

证明：由于函数严格单调，所以 $\Delta x\neq 0 \Leftrightarrow \Delta y\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}, \Delta x\to 0 \Leftrightarrow \Delta y\to 0,$$ （以下略)。

【例题9】设 $y=\arcsin x$，求 y'。

解：设 $y=\arcsin x \Rightarrow x=\sin y$，则 $y'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}$

所以 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

问题：是否需要考虑 $\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}$？

同理可得：$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

【例题10】设 $y=\arctan x$，求 y'。

解：设 $y=\arctan x \Rightarrow x=\tan y$，

则 $$y'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}。$$

同理可得：$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$，

【例题11】求函数 $y=x+\ln x$ 的反函数的导数 $\dfrac{dx}{dy}$。

解：$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}。$$

【例题12】设 $y=a\cdot\arccos\dfrac{a-x}{a}(0<x<2a)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\frac{a}{3}\pi}$。

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a\cdot\left[-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a-x}{a}\right)^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)\right]=\dfrac{a}{\sqrt{2ax-x^2}}$，

所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}$，而当 $y=\dfrac{a}{3}\pi$ 时，$x=\dfrac{a}{2}$，

因此，$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\frac{a}{3}\pi}=\left.\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right|_{x=\frac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

3.2.4 基本导数表

(1) $C' = 0, C$ 为常数；　(2) $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$；

(3) $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a$；　(4) $(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$；

(5) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$；　(6) $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$；

(7) $(\sin x)' = \cos x$；　(8) $(\cos x)' = -\sin x$；

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$；　(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$；　(12) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$；

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$。

3.3 隐函数与参数方程所确定函数的导数

3.3.1 隐函数的导数

1. 隐函数求导法

现在讨论由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数，

注意：在一定的条件下，方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 为 x 的函数，

如果 $y=y(x)$，代入方程得 $F[x,y(x)]\equiv 0$，两边对 x 求导数，

即可解出 $y'(x)$，下面举例说明。

【例题1】求由方程 $x^2+y^2=R^2$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数。

解：方程 $x^2+y^2=R^2$ 两边对 x 求导数，把 y 看成 x 的函数，

$2x+2y\cdot y'=0$，解得：$y'=-\dfrac{x}{y}$。

注：准确地说是恒等式两边求导数

$$y=y(x)\,,(y^2)'=[y^2(x)]'=2y(x)\cdot y'(x)。$$

如果解出 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，同样可得：

$$y'(x)=\pm\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{\pm\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{y}。$$

【例题2】求由方程 $y^3\cos(x^2y)=\mathrm{e}^{3xy}$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数。

解：方程两边对 x 求导数，把 y 看成 x 的函数，

$$3y^2\cdot y'\cdot\cos(x^2y)+y^3\cdot[-\sin(x^2y)\cdot(2xy+x^2y')]=\mathrm{e}^{3xy}\cdot 3\cdot(y+xy'),$$

解得：$y'=\dfrac{3y\mathrm{e}^{3xy}+2xy^4\sin(x^2y)}{3y^2\cos(x^2y)-y^3x^2\sin(x^2y)-3x\mathrm{e}^{3xy}}$。

注意：此方程无法解出 y，也没有必要！

问题：方程两边求导后一定能够解出 y' 吗？

【例题3】设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{xy}+\ln\dfrac{y}{x+1}=0$ 所确定的隐函数，

求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

解： 由方程可得 $x=0$ 时，$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

方程两边对 x 求导数，把 y 看成 x 的函数，

$$\mathrm{e}^{xy}\cdot(y+xy')+\frac{1}{y}\cdot y'-\frac{1}{x+1}=0,$$

用 $x=0$，$y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，代入可得：$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2}$。

【例题4】求曲线 $\sin(xy)+\ln|y-x|=2x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程。

解：方程两边对 x 求导数，把 y 看成 x 的函数，

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y-x}\cdot(y'-1)=2,$$

故 $y'\big|_{(0,1)}=2,$

所以，曲线在点 $(0,1)$ 处的切线方程为：

$$y-1=2(x-0) \text{ 或 } y=2x+1。$$

【例题5】求幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 的导数 y'。

解法一：先考虑指数函数复合函数的导数 $y=a^{v(x)}$

$$y'=a^{v(x)}\cdot\ln a\cdot v'(x);$$

再考虑幂函数复合函数的导数 $y=[u(x)]^{b}$

$$y'=b\cdot[u(x)]^{b-1}\cdot u'(x);$$

对于幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 可以化为：$y=u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，

然后，利用指数函数复合函数求导，得：

$$y'=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\cdot[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)]=u^{v}\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'。$$

$\boxed{\text{注意结构}}$

【例题5】解法二：

对于幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 两边取对数可以化为：

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

看成隐函数，求导数得：

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$$

则 $y' = y\cdot[v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)]$

$$= u^v\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'。$$

2. 对数求导法

在例题5解法二中利用先取对数再求导数的方法，称为对数求导法。

【例题6】设 $y=\dfrac{(x+1)^2\cdot\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$，求 y'。

解：可以直接求导数，但是比较复杂，利用对数求导法，

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|3x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\ln|2x+1|$$

故 $y'=y\cdot[\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{3x-2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{2x+1}]$。注意：$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

立志成才 报国裕民

【例题7】设 $y=x^{\sin x}+(\cos x)^{x}$，求 y'。

解： $y=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}+\mathrm{e}^{x\ln\cos x}$，

$$y'=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\cdot(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x)+\mathrm{e}^{x\ln\cos x}\cdot[\ln\cos x+x\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)]$$

故 $y'=x^{\sin x}\cdot(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x)+(\cos x)^{x}\cdot[\ln\cos x-x\cdot\tan x)]$

注意：此题不能直接利用对数求导法。

问题：如果用对数求导法，怎么处理？

注意：对数求导法是求导法的补充

把显函数看成隐函数，然后利用隐函数求导法计算

也是一种常用方法。

- 反函数的导数

把函数 $y = f(x)$ 看成隐函数，两边对 y 求导数，

同样可得：$1 = f'(x) \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$。

3.3.2 参数方程所确定函数的导数

设变量 y 与变量 x 的关系是由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (t\in I)$

给出的，设 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$,

则 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在，且有 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$,

此时，$y=\psi(t)=\psi[\varphi^{-1}(x)]$,

因此有：$\dfrac{dy}{dx}=\psi'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$。

立志成才报国裕民

【例题8】求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=1-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数。

解：由 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{1+t^2}$，得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{1}{2t}$。

【例题9】求摆线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}-1,1)$ 处的切线方程。

解：点 $(\frac{\pi}{2}-1,1)$ 对应于 $t=\frac{\pi}{2}$，而 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$，

故切线方程为：$y-1=x-(\frac{\pi}{2}-1)$ 或 $y=x-\frac{\pi}{2}+2$。

【例题10】证明：星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 上任一点(坐标轴上的点除外)处的切线被坐标轴所截得的线段的长度等于常数。

证明：$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t\,,\ t\neq\frac{k}{2}\pi$$

星形线上对应于参数 t 的点处的切线方程为：

$$y-a\sin^3 t=-\tan t\cdot(x-a\cos^3 t),$$

令 $y=0$ 得切线在 x 轴上的截距为：$x_0=a\cos^3 t+a\sin^2 t\cos t=a\cos t$；

令 $x=0$ 得切线在 y 轴上的截距为：$y_0=a\sin^3 t+a\cos^2 t\sin t=a\sin t$，

故切线被坐标轴所截得的线段长度 $d=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=a$ 为常数，证毕。

【例题11】求由极坐标方程 $r=a\cos\theta$ 表示的曲线在对应点 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 的切线方程和法线方程。

解：先将曲线方程化为参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta=a\cos^2\theta \\ y=r\sin\theta=a\cos\theta\sin\theta \end{cases}$

曲线的切线的斜率为：$k=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-a\sin^2\theta+a\cos^2\theta}{-2a\cos\theta\sin\theta}=-\cot 2\theta$，

当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$x_0=\dfrac{3}{4}a, y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a, k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故切线方程为：$y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-\dfrac{3}{4}a)$，

法线方程为：$y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a=\sqrt{3}(x-\dfrac{3}{4}a)$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！