高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

2.6 函数的连续性

2.6.1 函数连续的定义

1. 定义1：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果自变量增量 Δx 趋于零时，相应的函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

2. 定义2：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

- 函数连续的"$\varepsilon-\delta$"定义：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

- 连续的三个要素：

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义、有极限且极限值等于函数值。

3. 左、右连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 即 $f(x_0^-)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 即 $f(x_0^+)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续。

- 定理1：函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件是：

函数 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续。

【例题1】证明函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 点连续。

即用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0=1$。

证明：$\forall\varepsilon>0$, 找 $\delta>0$, 使得当 $|x-0|<\delta$ 时，有 $|\mathrm{e}^x-1|<\varepsilon$。

解不等式得 $\ln(1-\varepsilon)<x<\ln(1+\varepsilon)$,

所以，$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon),\ln(1+\varepsilon)\}$, 当 $|x-0|<\delta$ 时，$|\mathrm{e}^x-1|<\varepsilon$,

即函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $x=0$ 点连续，证毕。

【例题2】讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续。

【例题3】讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

【例题4】设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ b\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，

求常数 a,b 的值。

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$,

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} b\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{b}{2}\pi$,

所以 $a=2, b=-\dfrac{4}{\pi}$。

2.6.2 函数的间断点

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的三个要素中至少有一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 间断，x_0 称为函数的间断点。

1. 间断点的常见类型

无穷间断点：$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，在点 $x=1$ 处，

震荡间断点：$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，在点 $x=0$ 处，

跳跃间断点：$f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$，在点 $x=0$ 处，

可去间断点：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，在点 $x=0$ 处。

2. 间断点的分类

把左、右极限均存在的间断点称为第一类间断点，其余间断点称为第二类间断点。

注意：跳跃间断点和可去间断点是第一类间断点，

无穷间断点和震荡间断点是第二类间断点。

跳跃间断点表示函数在该点处左、右极限存在但不相等。

可去间断点表示函数在该点处有极限，但极限值不等于函数值或函数在该点处没有定义。

对于可去间断点可通过修改函数值或补充在该点的函数值使得函数在该点连续，因此称为可去间断点。

例如：函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，所以是间断点。

补充定义 $f(0)=1$ 即 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0\end{cases}$，

则函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

【例题5】求函数 $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ 的间断点并确定其类型。

解：显然函数在 $x=0, x=1, x=-1$ 没有定义，所以

$x=0, x=1, x=-1$ 是间断点。

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\ (x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$，

所以 $x=0, x=1$ 是第一类(可去)间断点，

$x=-1$ 是第二类(无穷)间断点。

【例题6】求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的间断点并确定其类型。

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$，

所以 $x=0$ 是第一类(跳跃)间断点。

【例题7】求函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x(x+1)^2}}$ 的间断点并确定其类型。

解：函数在 $x=0, x=-1$ 没有定义，所以 $x=0, x=-1$ 是间断点。

由于 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x(x+1)^2}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x(x+1)^2}}=+\infty$

所以 $x=0$ 是第二类(无穷)间断点。

而 $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1} e^{\frac{1}{x(x+1)^2}}=0$，

所以 $x=-1$ 是第一类(可去)间断点，

2.6.3. 连续函数

1. 连续函数的定义

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，或称函数 $f(x)$ 为开区间 (a,b) 上的连续函数，记作：$f\in C(a,b)$。

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，或称函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，记作：$f\in C[a,b]$。

【例题8】证明函数 $f(x)=\cos x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。

证明： $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，需证： $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$，

$\forall\varepsilon>0$, 找 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon$。

放大不等式

$$|\cos x-\cos x_0|=\left|-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\sin\left|\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\varepsilon$$

所以，$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon$,

即函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，证毕。

【例题9】证明函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

证明：$\forall x_0 \in (-\infty,+\infty)$，需证：$\lim\limits_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0$，

$\forall \varepsilon>0$, 找 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\arctan x-\arctan x_0|<\varepsilon$。

而 $|\arctan x-\arctan x_0|=|\arctan\dfrac{x-x_0}{1+xx_0}|<|\dfrac{x-x_0}{1+xx_0}|$

问题：怎么办?

$|\dfrac{x-x_0}{1+xx_0}|<|x-x_0|$?

如果 x 和 x_0 同号就可以了，怎样可以保证同号呢?

【例题9】证明:

需要区分 $x_0=0$ 和 $x_0\neq 0$ 两种情况，分别证明。

当 $x_0=0$ 时，由于 $|\arctan x-0|<|x|<\varepsilon$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x-0|<\delta$ 时，有 $|\arctan x-0|<\varepsilon$;

当 $x_0\neq 0$ 时，增加限制条件 $|x-x_0|<\frac{1}{2}|x_0|$,

此时，x, x_0 同号，因此

$$|\arctan x-\arctan x_0|=|\arctan\frac{x-x_0}{1+xx_0}|<|\frac{x-x_0}{1+xx_0}|<|x-x_0|$$

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\frac{1}{2}|x_0|,\varepsilon\}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$|\arctan x-\arctan x_0|<\varepsilon$, 因此，函数连续，证毕。

2. 连续函数的运算

- 定理2：若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数

$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处连续。证明（略）。

- 定理3：若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $y=f(u)$

在对应点 $u_0(u_0=\varphi(x_0))$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$

在点 x_0 处连续。

证明：由条件知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$ 且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]$，

需证：$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$，类似复合函数极限的证明(以下略）。

- 定理4：若函数 $y=f(x)$ 在区间 $D(f)$ 上严格单调增加(或减少)且连续，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $R(f)$ 上严格单调增加(或减少)且连续。证明（略）。

3. 初等函数的连续性

结合极限的定义、典型例题及连续函数的运算定理，可得

- 重要结论：一切初等函数在其定义区间内都是连续的！

- 注意：对于分段函数主要讨论分割点处的连续性。

【例题10】讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}\ (x>0)$ 的连续性。

解：由于

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}=\max\{1,2x,x^2\}=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{1}{2}\\ 2x, & \frac{1}{2}\le x\le 2\\ x^2, & x>2\end{cases}$$

在 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=2$ 点处函数连续，所以函数连续。

2.6.4 闭区间上连续函数的性质

定理5：有界性定理

若函数在闭区间上连续，则函数在闭区间上有界。

证明*： 利用反证法，需要运用区间套定理证明，(略)。

定理6：最大值、最小值定理

闭区间上的连续函数至少取得最大值、最小值各一次。

证明*： 利用反证法，需要运用确界存在定理证明，(略)。

定理7：零值定理

若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$,

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$。

证明*: 利用两分法，需要运用区间套定理证明，(略)。

推论： 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)\le 0$,

则 $\exists\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$。

定理8：介值定理

闭区间上的连续函数能够取得介于端点值之间的任何值。

注意：定理7与定理8是等价定理。

推论：闭区间上的连续函数能够取得介于最大值、最小值之间的任何值。

【例题11】证明方程 $x\lg x-1=0$ 在区间 $(2,3)$ 内至少有一个根。

证明：由初等函数连续性，知 $f(x)=x\lg x-1$ 在 $[2,3]$ 上连续，

而 $f(2)=2\lg 2-1<0, f(3)=3\lg 3-1>0,$

由介值定理知，$\exists\xi\in(2,3)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程至少有一个根。

【例题12】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A,$

证明：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

注意：无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 一定是开区间。

【例题12】证明:

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 所以对于 $\varepsilon_0=1, \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时,

$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1$, 此时, $||f(x)|-|A||\le|f(x)-A|<1$, 即 $|f(x)|<|A|+1$;

而 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续, 故 $\exists M_1>0$, 使得 $|f(x)|\le M_1$;

取 $M=\max\{|A|+1, M_1\}$, 则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $|f(x)|\le M$,

即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 证毕。

【例题13】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续，且 $f(0)=f(1)$，

证明：$\exists\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$。

证明：作函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$，则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续，

而 $F(0)=f(0)-f(\frac{1}{2}),F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(1)$，所以，$F(0)\cdot F(\frac{1}{2})\le 0$，

如果 $F(0)=0$，则取 $\xi=0$；如果 $F(\frac{1}{2})=0$，则取 $\xi=\frac{1}{2}$；

如果 $F(0)\cdot F(\frac{1}{2})<0$，则由零值定理知，$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使得 $F(\xi)=0$，

综上所述，$\exists\xi\in[0,1]$，使得 $F(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$，证毕。

注：如果利用零值定理的推论，则可直接得到结论。

【例题14】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续，且 $f(0)=f(1)$，

证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{4})$。

证明：作函数 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{4})$，则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{3}{4}]$ 上连续，

而 $F(0)=f(0)-f(\frac{1}{4}),F(\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})-f(1)$，

问题：怎么办？ 证明 $F(\frac{1}{4})=F(\frac{3}{4})$?

尝试考虑 $F(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2}),F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(\frac{3}{4})$，

我们可以看到 $F(0)+F(\frac{1}{4})+F(\frac{1}{2})+F(\frac{3}{4})=0$，接下来怎样处理？

【例题14】证明(续)：

如果全为零，即 $F(0)=F(\frac{1}{4})=F(\frac{1}{2})=F(\frac{3}{4})=0$，则取 $\xi=\frac{1}{2}$ 即可；

如果 $F(0),F(\frac{1}{4}),F(\frac{1}{2}),F(\frac{3}{4})$ 不全为零，则至少有两项异号，

不妨假设 $F(0)\cdot F(\frac{1}{4})<0$，则由零值定理知，$\exists\xi\in(0,\frac{1}{4})\subset(0,1)$，

使得 $F(\xi)=0$，其余情况类似可证，证毕。

更加一般的情况，见下一个例题。

【例题15】设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，且

$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$ 。

证明：由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

所以 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 有最大值 M, 有最小值 m,

即 $$m \le f(x) \le M \Rightarrow m \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \le M$$

由介值定理推论知，$\exists \xi \in [x_1, x_n] \subset (a,b)$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$， 证毕。 注：此题可作为常用结论。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢　谢！