高等数学 (I)

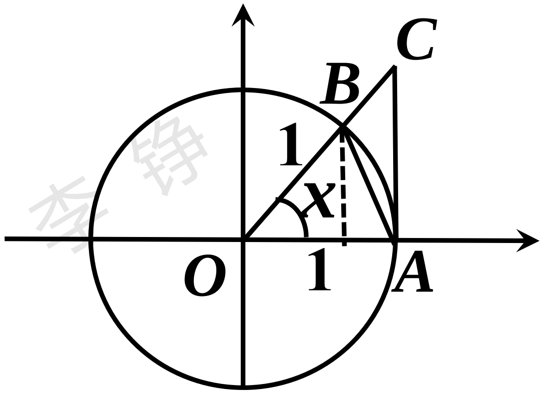
主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

2.5 两个重要极限与无穷小的比较

2.5.1 两个重要极限

1. 重要极限1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。



证明：先考虑 $x\to 0^{+}$ 时的情形，

如图，作单位圆由面积关系知

$S_{\Delta OAB}<S_{扇形OAB}<S_{\Delta OAC}$ 即 $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^{2}\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

所以 $\sin x<x<\tan x\Rightarrow \cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

重要极限1证明(续):

由函数的夹逼准则可得，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

当 $x<0$ 时，令 $x=-t$,

则有 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin(-t)}{(-t)}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1$,

因此，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

【例题1】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{x}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{(2x)}\cdot\dfrac{2}{\cos 2x}=1\cdot2=2$。

【例题2】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$。

解法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$。

解法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$。

【例题3】求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$。

解：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}=\cos a$。

比较：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=?$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}=?$

基本型：$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$。

2. 重要极限2：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$。

证明： 先考虑 $x\to+\infty$ 时的情形，

$\forall x>0$, 有 $[x]\le x\le[x+1]$, 当 $x>1$ 时，记 $[x]=n$,

则 $(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})=\mathrm{e}$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=\mathrm{e}$,

2. 重要极限2 证明(续):

由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$。

当 $x\to-\infty$ 时，令 $x=-(t+1)$，则

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1} = \mathrm{e},$$

因此，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$，证毕。

【例题4】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x+3}$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}\cdot 2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2\cdot(1+\dfrac{2}{x})^3$

$=\mathrm{e}^2\cdot 1=\mathrm{e}^2$。

【例题5】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$。

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^t=\mathrm{e}$。

【例题6】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+1})^x$。

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+1})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{-2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{-2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{-2}}\right]^{-1}\cdot(1+\frac{-2}{2x+1})^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}。$$

基本形式可简记为：$(1+\frac{1}{\infty})^{\infty}\to e,(1+0)^{\frac{1}{0}}\to e$

注意：两个 ∞ 需完全一致，而两个 0 表示无穷小也需完全一致。

结合复合函数极限运算法则。

常用变化公式：$(1+0)^{\infty} \to \mathrm{e}^{0\cdot\infty}$

即：设 $\lim f(x)=1$ 且 $\lim g(x)=\infty$，

则 $\lim f(x)^{g(x)} = \lim[1+(f(x)-1)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}$

【例题7】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

或 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$。

【例题8】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$。

【例题9】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$。

解： 令 $e^x-1=t\Rightarrow x=\ln(1+t)$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$。

上海科技大学 ShanghaiTech University

2.5.2 无穷小的比较

1. **定义** 设 α,β 是无穷小，即 $\lim\alpha=0, \lim\beta=0$,

- 高阶无穷小

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 为 α 的高阶无穷小，记作: $\beta=o(\alpha)$;

- 同阶无穷小

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 则称 β 为 α 的同阶无穷小，记作: $\beta=O(\alpha)$;

注：严格来说数学上 $\beta=O(\alpha)$ 表示 $\frac{\beta}{\alpha}$ 有界，同阶记为 $\beta\asymp\alpha$。

- 等价无穷小

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 为 α 的等价无穷小，记作：$\beta\sim\alpha$；

- K 阶无穷小

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，则称 β 为 α 的 k 阶无穷小。

例如：当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的高阶无穷小，

是 x^2 的同阶无穷小，也是 x 的二阶无穷小，

$1-\cos x$ 还是 $\dfrac{1}{2}x^2$ 的等价无穷小。

【例题10】证明：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$。

证明： 即证：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$，

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$，证毕。

【例题11】 当 $x\to 0$ 时，确定 $\tan x-\sin x$ 是 x 的几阶无穷小?

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\tan x-\sin x$ 是 x 的三阶无穷小。

2. 无穷小的主部

设 $\lim\beta=0$, 若 $\exists\alpha, \lim\alpha=0$, 使得 $\lim\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=0$,

或 $\beta-\alpha=o(\alpha)$, 则称 α 为 β 的主部，此时, $\beta=\alpha+o(\alpha)$,

注意：此时 $\beta\sim\alpha$

【例题12】当 $x\to0^+$ 时，确定无穷小 $\sqrt{x^2+x}$ 的主部。

解：当 $x\to0^+$ 时，$x+x^2\sim x$, 所以, $\sqrt{x^2+x}\sim\sqrt{x}$,

因此，无穷小 $\sqrt{x^2+x}$ 的主部是 $\sqrt{x}$。

2. 等价无穷小的代换

定理1：设 $\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 均为无穷小，$\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，

且 $\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$。

证明：$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta_1}\cdot\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\dfrac{\alpha_1}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$。

定理2：设 α,β 为无穷小，且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则 $\alpha+\beta\sim\alpha$，

即 $\alpha+o(\alpha)\sim\alpha$。

3. 常用的等价无穷小

设 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x, (1+x)^{\mu}-1 \sim \mu x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \mathrm{e}^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a。$$

注：如果 $x \to \infty$ 可令 $t = \dfrac{1}{x} \to 0$,

如果 $x \to x_0$ 可令 $t = x - x_0 \to 0$。

【例题13】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$。

【例题14】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(\mathrm{e}^{-x}-1)(\sqrt{1+\tan x}-1)}$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{(-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=-1$。

【例题15】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\cos x-1}{2^x-1+x^2}$。

解：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, \sin x+\cos x-1\sim x$$

$$2^x-1\sim x\ln 2, 2^x-1+x^2\sim x\ln 2,$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2}$。

【例题16】设极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{3}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin x\cdot f(x)}{x^3}$。

问题：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin x\cdot f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}$?

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x\cdot f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x+\sin x\cdot[1+f(x)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot[1+f(x)]}{x^3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}。$$

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！