高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

2.4 极限运算法则及极限存在准则

2.4.1 极限运算法则

设 $\lim u = A, \lim v = B,$

法则1：$\lim(u+v) = A+B;$

由极限与无穷小的关系：

$$\lim u = A \Leftrightarrow u = A+\alpha,\ \text{其中}\ \lim \alpha = 0。$$

利用无穷小性质可直接证得。（略）

- 极限运算法则

设 $\lim u = A, \lim v = B,$

法则2：$\lim(u \cdot v) = A \cdot B;$

推论1：若 c 为常数，则 $\lim(c \cdot u) = c \cdot \lim u = c \cdot A;$

推论2：$\lim u^m = A^m$。

法则2可利用无穷小性质直接证得。（略）

- 极限运算法则

法则3：设 $\lim u = A, \lim v = B$，且 $B \neq 0$，则：$\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{A}{B}$;

证明：$\lim u = A \Leftrightarrow u = A + \alpha, \lim v = B \Leftrightarrow v = B + \beta,$

其中 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0,$

由法则1，法则2可得

$$\frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)}$$ 是无穷小，证毕。

注意：$\lim v = B (B \neq 0) \Rightarrow \lim B \cdot v = B^2 \neq 0$ 则 $\dfrac{1}{B \cdot v}$ 有界。

法则4: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 且当 $x\in\overset{0}{U}(x_0)$ 时, $\varphi(x)\neq u_0$,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$。

证明: 由 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 知:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall u:0<|u-u_0|<\eta\Rightarrow|f(u)-A|<\varepsilon,$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 知: 对上述 η, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$|u-u_0|=|\varphi(x)-u_0|<\eta$, 而 $x\in\overset{0}{U}(x_0)$ 时, $\varphi(x)\neq u_0$, 故

$0<|\varphi(x)-u_0|<\eta$, 因此, $|f[\varphi(x)]-A|<\varepsilon$, 证毕。

- 极限运算法则的变化

若 $\lim u = A$, 则 $\lim(u \pm v) = A \pm \lim v$;

若 $\lim u = B \neq 0$, 则 $\lim(u \cdot v) = B \cdot \lim v$;

- 常用结论：设 $a_0, b_0 \neq 0, l, k \in \mathbf{N}$, 则有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^l + a_1 n^{l-1} + \cdots + a_l}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & l = k \\ 0, & l < k \\ \infty, & l > k \end{cases}$$

由常用结论直接可得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{3n^2+2n-1}=\frac{2}{3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{n^3+2n-3}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n+4}{n^2+2n-3}=\infty$$

- 对于函数极限也有相应的结论:

设 $a_0, b_0 \neq 0, l, k \in \mathrm{N}$,

则有: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^l+a_1x^{l-1}+\cdots+a_l}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & l=k\\ 0, & l<k\\ \infty, & l>k\end{cases}$$

【例题1】 极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-3}-x+4}{\sqrt{x^2+\sin x}}=($　　　$)$。

解：当 $x\to-\infty$ 时，$\sqrt{x^2}=-x,\sqrt{4x^2}=-2x$

比较最高次数的系数直接可得极限值为3。

【例题2】设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，则常数 $(a,b)=($　　$)$。

解：已知极限为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2-(ax^2+bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2+bx+1}}=2,$

比较最高次数得常数 $(a,b)=(9,-12)$。

【例题3】设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=-2$，则常数 $(a,b)=(\quad)$。

解：由于 $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$，由极限存在，可得

分子也有零因子 $(x-1)$，设 $x^2+ax+b=(x-1)(x+c)$，

由极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+c)}{(x-1)(x+3)}=-2$，得 $c=-9$，$(a,b)=(-10,9)$。

【例题4】极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=(\quad)$。

解：由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\dfrac{2}{3})^n=0$，所以原极限 $=\dfrac{1}{3}$。

【例题5】 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$。

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^{2^2}})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$

$=2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})=2$。

【例题6】 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2+2x-3}$。

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{-2}{(x+3)(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1})}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$。

【例题7】 求极限：$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{-(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3}=-2$。

【例题8】 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$。

解：利用 $x^k-1=(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})$,

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

【思考题】 如何求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$。

2.4.2 极限存在准则

1. 准则1： 单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界，则 $\{x_n\}$ 收敛，

若数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界，则 $\{x_n\}$ 收敛。

准则1可由确界存在定理证明得到。

通常准则1作为高等数学的公理。

- 有界是数列收敛的必要条件，

单调有界是数列收敛的充分条件。

【例题9】 证明数列 $\{x_n\}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 的极限存在。

证法一：利用A-G不等式证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界，

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1\le[\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}]^{n+1}=(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}=x_{n+1},$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加，

又 $$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=4\cdot[(1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}]\le 4\cdot[\frac{n(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}]^{n+2}=4,$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界，故数列 $\{x_n\}$ 有极限。

【例题9】证法二：利用二项式定理证明数列$\{x_n\}$单调有界，

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

相应有

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdot(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

比较得到$\{x_n\}$单调增加，

而 $x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$

所以$\{x_n\}$有上界，故数列$\{x_n\}$有极限。

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e} \approx 2.71828182\cdots$$

【例题10】 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1+\frac{x_n}{1+x_n}, (n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在。

证明：显然 $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, \cdots, x_{n+1} = 1+\frac{x_n}{1+x_n} \Rightarrow 1 \le x_n \le 2,$

所以 $\{x_n\}$ 有界，

又 $x_{n+1}-x_n = (1+\frac{x_n}{1+x_n})-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}) = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+x_n)},$

故 $x_{n+1}-x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号，而 $x_2 - x_1 > 0,$

因此，数列 $\{x_n\}$ 单调增加，极限存在，证毕。

【例题11】设 $x_n=\dfrac{a_1}{1+a_1}+\dfrac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\dfrac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$,

其中：$a_i>0\ (i=1,2,\cdots)$，判定数列 $\{x_n\}$ 的敛散性。

证明：由于 $\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\dfrac{(1+a_n)-1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以 $x_n=1-\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$,

问题：$x_n\to1$?

【例题11】证明(续):

由于: $a_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots)$, 显然数列 $\{x_n\}$ 单调增加,

而 $x_n = 1 - \dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 1$,

故数列 $\{x_n\}$ 有界,

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛。

注意: 并没有要求求数列的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 。

- 函数极限的单调有界准则

对于单调有界函数的单侧极限也有相应的结论

- 定理：若函数 $f(x)$ 在点 a 的某个右邻域 $(a,a+\delta)$ 内单调有界，则其右极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在；

若函数 $f(x)$ 在点 a 的某个左邻域 $(a-\delta,a)$ 内单调有界，则其左极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 存在。

【例题12】证明：$\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = 1$。

证法一：利用“$\varepsilon-\delta$”定义证明，略。

证法二：由于函数 2^x 在 $(0,1)$ 内单调有界，

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x$ 存在，

而已知 $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$，由海涅定理得 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x = 1$，

2. 准则2：夹逼准则

设有三个数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足条件：

1. $y_n \le x_n \le z_n\ (n=1,2,\cdots)$,

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$,

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$。

证明： 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ 知，$\forall\varepsilon>0, \exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时，$|y_n-a|<\varepsilon$,

即 $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon\cdots\cdots\cdots(1)$

- 准则2 证明(续):

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ 知，对上述 $\varepsilon, \exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时，

$|z_n - a| < \varepsilon$，即 $a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon \cdots\cdots\cdots(2)$

所以，对上述 ε，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，

$(1),(2)$ 式同时成立，又 $y_n \le x_n \le z_n$，所以有

$a-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a+\varepsilon$，即 $|x_n - a| < \varepsilon$，证毕。

【例题13】设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},a_k>0\,(k=1,2,\cdots,m)$,

证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$。

证明: 不妨设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a_s\ (1\le s\le m)$,

则 $A=a_s\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{m\cdot a_s^n}=\sqrt[n]{m}\cdot A$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{m}=1$, 所以由夹逼准则知,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$, 证毕。

- 函数极限的夹逼准则

- 定理：若 $\forall x \in \overset{0}{U}(a,\delta)$，有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$ 且

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A，\text{则} \lim_{x\to a} f(x) = A。$$

证明：由 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$ 及海涅定理得，

对于任一满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $x_n \ne a$ 的数列 $\{x_n\}$ 必有

$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = A$，由数列极限的夹逼准则得

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，再由海涅定理得，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，证毕。

- 函数极限的夹逼准则

注意: 如果极限过程改为 $x \to \infty$ 或其它极限过程

同样有相应的函数极限的夹逼准则。

如果定理中的 A 换成 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，结论同样成立。

【例题14】设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求之。

- 利用单调有界准则证明极限存在

证法一：因为 $x_1=10>3$，由数学归纳法得 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>3$，

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界；

$$\text{而 } x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n=\frac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}=\frac{(2+x_n)(3-x_n)}{\sqrt{6+x_n}+x_n}$$

所以 $x_{n+1}-x_n<0$，故数列单调减少，因此有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}\Rightarrow a=3$。

【例题14】证法二：

由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$

得 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，而 $x_2-x_1=-6<0$,

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减，又显然有 $x_n>0$,$(n=1,2,\cdots)$

因此数列 $\{x_n\}$ 有极限。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}\Rightarrow a=3$。

【例题14】 证法三:

先设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 可求得 $a=\sqrt{6+a} \Rightarrow a=3$。

由 $x_{n+1}-3=\sqrt{6+x_n}-3=\dfrac{x_n-3}{\sqrt{6+x_n}+3}$ 得 $|x_{n+1}-3|<\dfrac{1}{3}|x_n-3|$,

所以 $|x_{n+1}-3|<\dfrac{1}{3}|x_n-3|<\dfrac{1}{3^2}|x_{n-1}-3|<\cdots<\dfrac{1}{3^n}|x_1-3|$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-3|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=3$。

思考题: 如果题中条件改为:

$x_1>-6, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$ 如何证明?

- 区间套定理*

设有一无穷闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足条件:

$$\forall n, a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \quad \text{且} \quad \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\forall n$, 有 $a_n \le \xi \le b_n$, 即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]$ 。

证明参见书P60-61，此处略。

- 注意:

区间套定理与确界存在定理、单调有界准则是等价的。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！