高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

2.2 极限的性质

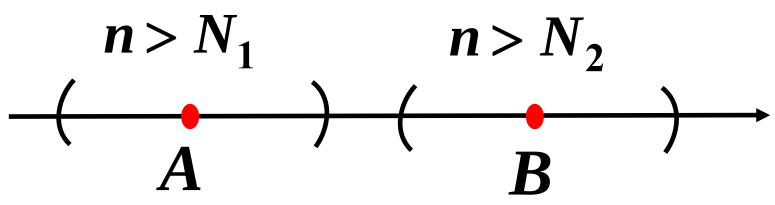
2.2.1 数列极限的性质

有极限的数列称为**收敛数列**，反之称为**发散数列**。

- **性质1(唯一性)：** 收敛数列其极限值唯一。

证明： 利用反证法，

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = B$， $A \neq B$， 不妨设 $A < B$，



$n > N = \max\{N_1, N_2\}$?

- 性质1　证明(续):

由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 知：对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{B-A}{2}$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时，

有 $|x_n - A| < \varepsilon_0 = \dfrac{B-A}{2}$，得　$x_n < A + \varepsilon_0 = \dfrac{A+B}{2} \cdots\cdots\cdots(1)$

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = B$ 知：对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{B-A}{2}$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时，

有 $|x_n - B| < \varepsilon_0 = \dfrac{B-A}{2}$，得　$x_n > B - \varepsilon_0 = \dfrac{A+B}{2} \cdots\cdots\cdots(2)$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时，(1),(2) 同时成立，矛盾，证毕。

- 性质2(有界性)：收敛数列必有界。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$，取 $\varepsilon_0 = 1, \exists N$，当 $n > N$ 时，$|x_n - A| < \varepsilon_0 = 1$，

所以，$|x_n| - |A| \le |x_n - A| < 1$，即 $|x_n| < |A| + 1$，

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |A| + 1\}$，

则 $\forall n$ 有 $|x_n| \le M$，

即数列有界，证毕。

- 性质3(保号性)：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 且 $A>0$ (或 $A<0$), 则 $\exists N$,

当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$)。

证明：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 且 $A>0$, 对于 $\varepsilon_0=\dfrac{A}{2}$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时,

$|x_n-A|<\varepsilon_0=\dfrac{A}{2} \Rightarrow x_n>A-\dfrac{A}{2}>0$，证毕。

如果 $A<0$，取 $\varepsilon_0=-\dfrac{A}{2}$, 同理可证。

推论1：若 $x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$，则 $A\geq 0$。

推论2(保序性)：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = B$, 且 $A>B$, 则 $\exists N$,

当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$。

- 性质4(归并性)：

极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 的充分必要条件是数列 $\{x_n\}$ 的任何一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 均满足：$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$。

证明：必要性，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 知 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in Z^+$，

当 $n>N$ 时，$|x_n - A|<\varepsilon$， 取 $K=N$，当 $k>K$ 时，

$n_k \ge k > K = N$，此时，有 $|x_{n_k} - A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = A$。

充分性，由于 $\{x_n\}$ 本身就是自己的一个子列，证毕。

【例题1】证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to+\infty} x_{2k-1} = A \text{ 且 } \lim_{k\to+\infty} x_{2k} = A。$$

证明：必要性由归并性直接可得到，下面证充分性，

由 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = A$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists K_1$, 当 $k > K_1$ 时，$|x_{2k-1} - A| < \varepsilon$,

由 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k} = A$ 知，对上述 $\varepsilon, \exists K_2$, 当 $k > K_2$ 时，$|x_{2k} - A| < \varepsilon$,

所以，对上述 ε，取 $N = \max\{2K_1, 2K_2\}$，当 $n > N$ 时，

有 $|x_n - A| < \varepsilon$， 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$，证毕。

注意： 例题1可作为常用结论，以后可直接应用。

- 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子列 $\{x_{n_k}\},\{x_{m_k}\}$ 的极限存在，但极限值不相等，则数列 $\{x_n\}$ 的极限一定不存在。

2.2.2 函数极限的性质

- 性质1(唯一性):

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$, 则 $A=B$。

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$, 则 $A=B$。

证明类似数列极限性质的证明，略。

- 性质2(局部有界性):

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则 $\exists X>0$, 在 $|x|>X$ 时, $f(x)$ 有界。

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $\exists\delta>0$, 在 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内, $f(x)$ 有界。

证明类似数列极限性质的证明，略。

- 性质3(局部保号性):

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 且 $A>0$ (或 $A<0$), 则 $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时,

   有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)。

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$ (或 $A<0$), 则 $\exists\delta>0$,

   当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)。

证明(略)。

- 性质4(局部保序性):

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，

则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$。

- 海涅(Heine)定理:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对任一满足

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$ 且 $x_n\neq a$ 的数列 $\{x_n\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$。

2.3 无穷小和无穷大

2.3.1 无穷小

1. 定义：极限为零的数列和函数称为无穷小。

"0" 是作为无穷小的唯一常数。

若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 则称数列$\{x_n\}$为无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$，则称函数$f(x)$是当 $x\to\infty$ 时的无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$，则称函数$f(x)$ 是当 $x\to a$ 时的无穷小。

为了讨论方便，记无穷小 α 为 $\lim\alpha = 0$。

2. 无穷小的性质

性质一：设 α,β 是无穷小，则 $\alpha+\beta$ 也是无穷小，

推论：有限个无穷小的和也是无穷小。

性质二：设 α 是无穷小，u 有界，则 $\alpha\cdot u$ 也是无穷小；

简单证明，$\exists M>0, |u|<M$，由 $\lim\alpha=0$ 知，

$$\forall\varepsilon>0, \text{对于 } \varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}, \text{有 } |\alpha\cdot u|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon。$$

推论1：常数乘以无穷小仍是无穷小。

性质二：

推论2：无穷小乘以无穷小仍是无穷小；
有限个无穷小的积也是无穷小。

推论3：设 α 是无穷小，$\lim u = A$，则 $\alpha \cdot u$ 仍是无穷小；

设 α 是无穷小，$\lim u = B \neq 0$，则 $\dfrac{\alpha}{u}$ 仍是无穷小。

性质三：极限与无穷小的关系

$\lim u = A \Leftrightarrow u = A + \alpha$，其中 $\lim \alpha = 0$。

【例题1】验证：

（1）$\{\frac{\cos n}{n}\}$ 是无穷小；

（2）$f(x)=\frac{\arctan x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷小；

（3）$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是无穷小。

利用无穷小性质二：无穷小乘以有界量仍为无穷小

结合常用有界函数，易证，略。

【例题2】判定数列 $\{x_n\}=\{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})\}$ 是否为无穷小?

解：由于 $\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})=\sin[2\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=\sin\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

而 $\left|\sin\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|\le\left|\sin\dfrac{\pi}{n}\right|<\dfrac{\pi}{n}$,

所以数列 $\{x_n\}$ 是无穷小。

【例题3】证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ 当 $x\to 0$ 时是无穷小。

证明：即用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+2x}=0$，

增加限制条件 $|x|<\dfrac{1}{2}$，此时有 $\left|\dfrac{x}{1+2x}\right|<\dfrac{|x|}{1-2|x|}<\varepsilon$，

解不等式得 $|x|<\dfrac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\}$，

当 $0<|x|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x}{1+2x}\right|<\varepsilon$，

即函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}$ 当 $x\to 0$ 时是无穷小，证毕。

2.3.2 无穷大

1. 定义：绝对值无限增大的数列和函数称为无穷大。

注意：无穷大包括 $\infty, +\infty, -\infty$，严格定义如下：

(1) 数列 $\{x_n\}$ 为无穷大 ∞ 的严格定义

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty : \forall G > 0, \exists N, \forall n : n > N \Rightarrow |x_n| > G。$$

(2) 函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时为正无穷大 $+\infty$ 的严格定义

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty : \forall G > 0, \exists X > 0, \forall x : x < -X \Rightarrow f(x) > G$$

(3) 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时为负无穷大 $-\infty$ 的严格定义

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty : \forall G > 0, \exists \delta > 0, \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -G$$

- 在不同极限过程下其它形式的无穷大可类似定义。

无穷大 $\begin{cases} \infty \\ +\infty, \\ -\infty \end{cases}$ 极限过程：$n \to \infty$ 即为 $n \to +\infty$，

极限过程 $x \to \infty \left\langle \begin{matrix} x \to \infty \\ x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{matrix} \right.$，$x \to x_0 \left\langle \begin{matrix} x \to x_0 \\ x \to x_0^+ \\ x \to x_0^- \end{matrix} \right.$，

2. 无穷大与无穷小的关系

(1) 若 u 为无穷大，则 $\dfrac{1}{u}$ 是无穷小；

(2) 若 α 为无穷小且 $\alpha \neq 0$，则 $\dfrac{1}{\alpha}$ 是无穷大。

思考题：如何简单证明?

【例题4】证明函数 $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是无穷大。

证明：基本思想：$\forall G>0$，找 $\delta>0$，使得

当 $0<|x-0|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>G$。

注意：此时应考虑缩小不等式

问题：$\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|\geq\left|\dfrac{1}{x}\right|-2$？

【例题4】证明(续):

增加限制条件: $|x|<\frac{1}{2}$, 则有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right|\geq\left|\frac{1}{x}\right|-2>G$

解不等式得 $|x|<\frac{1}{2+G}$,

所以 $\forall G>0$, 取 $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2+G}\}$,

当 $0<|x-0|<\delta$ 时, $\left|\frac{1+2x}{x}\right|>G$, 证毕。

【例题5】设 $x_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$，问数列 $\{x_n\}$ 是否无界？是否为无穷大？

解：先回顾无界和无穷大的定义，

由于 $x_{2k} = 2k\sin k\pi = 0, x_{2k+1} = (2k+1)\sin(k\pi + \frac{1}{2}\pi) = (-1)^k(2k+1)$,

$\forall M > 0$，取 $N = 2[M]+1$，$|x_N| = |N| = 2[M]+1 > M$，

所以数列 $\{x_n\}$ 无界，

又由 $x_{2k} = 0$，故 $\forall G > 0, \forall n$ 不可能有 $|x_n| > G$，

因此数列 $\{x_n\}$ 不是无穷大。

3. 无穷大与无界的关系

- 无穷大一定无界，而无界不一定是无穷大。
- 无界数列一定有一个子列为无穷大。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！