高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

2.1.2 函数极限的定义

1. 当 $x\to\infty$ 时函数极限的定义

我们已经学习了数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 的定义。

当 $x\to+\infty$ 时，函数的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 可类似定义为

$\forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

问题：当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限如何定义呢?

- 当 $x\to\infty$ 时函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 对于绝对值无论怎样大的 x 值是有定义的，A 是一个常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$。

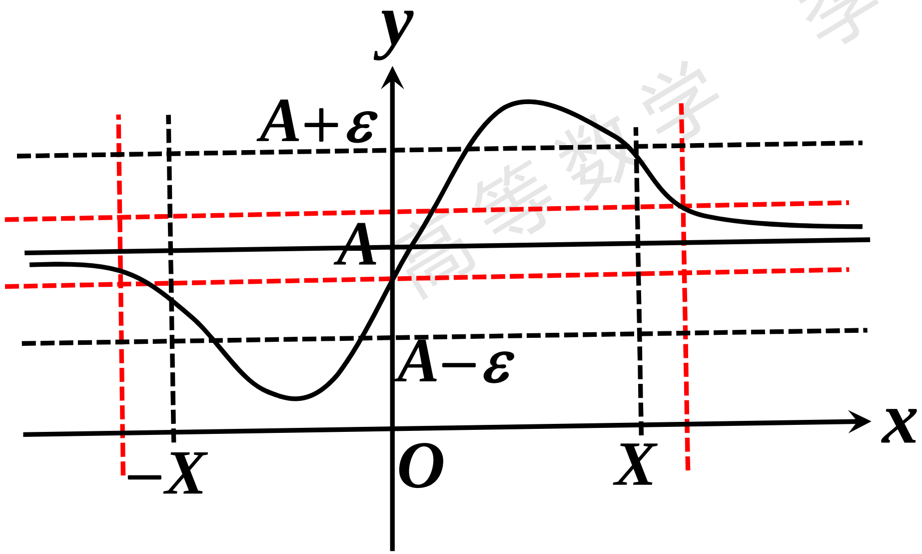
此定义称为 “$\varepsilon-X$” 定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:|x|>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon。$$

- 当 $x\to\infty$ 时函数极限的几何意义

"$\varepsilon-X$" 定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:|x|>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon。$$



【例题1】用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$, 找 X, 使得当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\frac{2}{x}-0\right|<\varepsilon$。

基本方法1：解不等式：$\left|\frac{2}{x}-0\right|<\varepsilon$, 得 $|x|>\frac{2}{\varepsilon}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\frac{2}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\frac{2}{x}-0\right|<\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$, 证毕。

【例题2】用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$, 找 X 使得当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$。

基本方法2：放大不等式：$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$, 解得 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，证毕。

【例题3】用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$, 找 X, 使得当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$。

而 $\left|\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{2(2x+1)}\right|<\varepsilon,$

问题：　如何处理？ $\left|\dfrac{1}{2(2x+1)}\right|<\dfrac{1}{4|x|}$?

基本方法3：增加限制条件，如何增加限制条件呢?

【例题3】证(续): 增加限制条件 $|x|>\dfrac{1}{2}$, 此时, $|2x+1|\geq 2|x|-1>0$,

放大不等式: $\left|\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{2(2x+1)}\right|\leq\dfrac{1}{2(2|x|-1)}<\varepsilon$,

解得 $|x|>\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1)$, 所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\max\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1)\}$,

当 $|x|>X$ 时, 有 $\left|\dfrac{x}{2x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$。

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$, 证毕。

注意: 还可以限制 $|x|>1$ 再放大 $\dfrac{1}{2(2|x|-1)}<\dfrac{1}{2|x|}<\varepsilon\cdots$

- 单侧极限

如果在函数极限的定义中把条件$|x|>X$改为 $x>X$,

则得到函数$f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x: x>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon。$$

如果在函数极限的定义中把条件$|x|>X$ 改为 $x<-X$,

则得到函数$f(x)$ 当$x\to-\infty$时的极限,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x: x<-X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon。$$

- 定理

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} f(x)=A。$$

- 函数极限不存在的典型例题

$f(x)=x$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 趋于无穷；

$f(x)=\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 震荡；

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

$f(x)=\arctan x$，当 $x\to\infty$ 时，无极限。

2. 当 $x \to x_0$ 时函数极限的定义

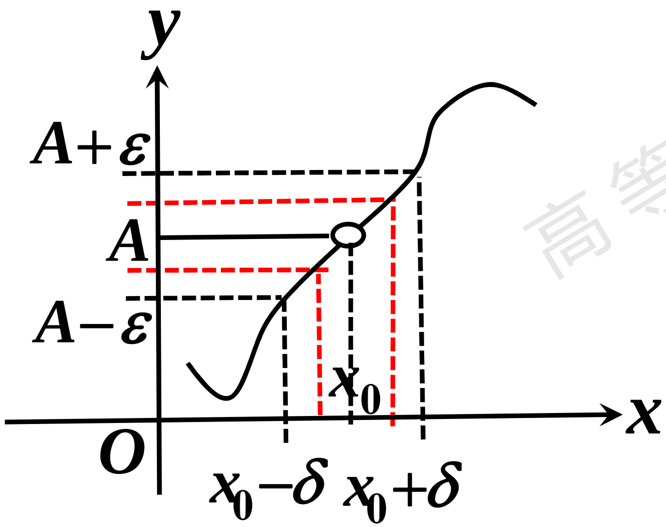
- 定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 是一个常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0)$。 此定义称为 “$\varepsilon-\delta$” 定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon。$$

- 当 $x \to x_0$ 时函数极限的几何意义

"$\varepsilon-\delta$" 定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon。$$



【例题4】用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$。

证：基本思想：

$\forall \varepsilon>0$, 找 δ, 使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|(2x+1)-3|<\varepsilon$。

基本方法1：解不等式：$|(2x+1)-3|<\varepsilon$，得 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

所以 $\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|(2x+1)-3|<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$，证毕。

【例题5】用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$，找 δ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$。

而：$|\sin x-\sin x_0|=|2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2}|$，

基本方法2：放大不等式：$|\sin x-\sin x_0|\le|2\sin\dfrac{x-x_0}{2}|<\varepsilon$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\arcsin\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，证毕。如果利用 $|\sin x|\le|x|$ 则可取 $\delta=\varepsilon$。

【例题6】用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$。

证：基本思想：

$\forall \varepsilon > 0$, 找 δ, 使得当 $0 < |x-2| < \delta$ 时，有 $|x^2-4| < \varepsilon$。

而 $|x^2-4| = |x-2||x+2|$，怎么办？ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$?

基本方法3：增加限制条件 $|x-2| < 1$，此时，$1 < x < 3$，

$|x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < \varepsilon$，解得 $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$，

所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\}$，当 $0 < |x-2| < \delta$ 时，$|x^2-4| < \varepsilon$，证毕。

- 左、右极限

如果在极限的定义中把条件 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x-x_0<\delta$,

则得到函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限，记作: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A=f(x_0^+)$,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x: x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$。

如果在极限的定义中把条件 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $0<x_0-x<\delta$,

则得到函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限，记作: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A=f(x_0^-)$,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x: x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$。

- 定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$。

【例题7】设函数 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$，问函数 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时，是否有极限?

解：类似例题5可证明 $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x=\cos x_0$，

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=\cos 0=1$，

所以，当 $x\to 0$ 时，极限存在且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$。

- 函数极限不存在的典型例题

$f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 趋于无穷；

$f(x)=\sin\frac{1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 震荡；

- 左右极限存在但不相等的典型例题

$$f(x)=\frac{|x|}{x},\ f(x)=\arctan\frac{1}{x},\ f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}},$$

当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限均存在但不相等。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢 谢！