高等数学 (I)

主讲教师：李铮

上一次课程内容回顾

第二章 极限与连续

高等数学的研究对象是函数，研究方法是极限。

极限是贯穿学习微积分的基本研究方法，是理论基础。

本章先引入极限的严格定义，完善极限理论的严密性，

学习数列和函数的极限，极限的性质、运算法则和存在准则，

学习计算极限的各种方法。

极限是我们学习高等数学遇到的第一个难点也是重点。

2.1 极限的定义

2.1.1 数列极限的定义

1. 数列

把一些数排成一列称为数列，在本课程中我们主要讨论无穷数列。

数列常表示为：$\{x_n\}: x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 其中 x_n 称为数列的通项或一般项。数列可看成特殊的函数 $f: Z^+ \to R,\ x_n = f(n), n \in Z^+$，

数列又称为整标函数。

问题：数列都可看成整标函数吗？

- 单调数列

若 $\forall n \in Z^+, x_n \le x_{n+1}$ 或 $x_n \ge x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$为单调增数列或单调减数列。

- 有界数列

若 $\exists M > 0, \forall n, |x_n| \le M$，则称数列 $\{x_n\}$为有界数列。

- 子数列

设 $n_1, n_2, \cdots n_k, \cdots$ 是正整数集的一个无穷子集，且 $n_{k+1} > n_k, k = 1,2,\cdots$，则称数列$\{x_{n_k}\}$为 $\{x_n\}$ 的一个子数列。

2. 数列极限的定义

如果当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 无限接近于常数 a,

那么称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$,

或 $x_n \to a\ (n\to+\infty)$。

问题：如何用数学语言来描述数列的极限呢?

- 数列极限的定义

设一个数列$\{x_n\}$和一个常数 a, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在正整数 N, 使得对于一切满足$n > N$ 的 x_n 都有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,

记作：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 或 $x_n \to a\ (n\to+\infty)$。

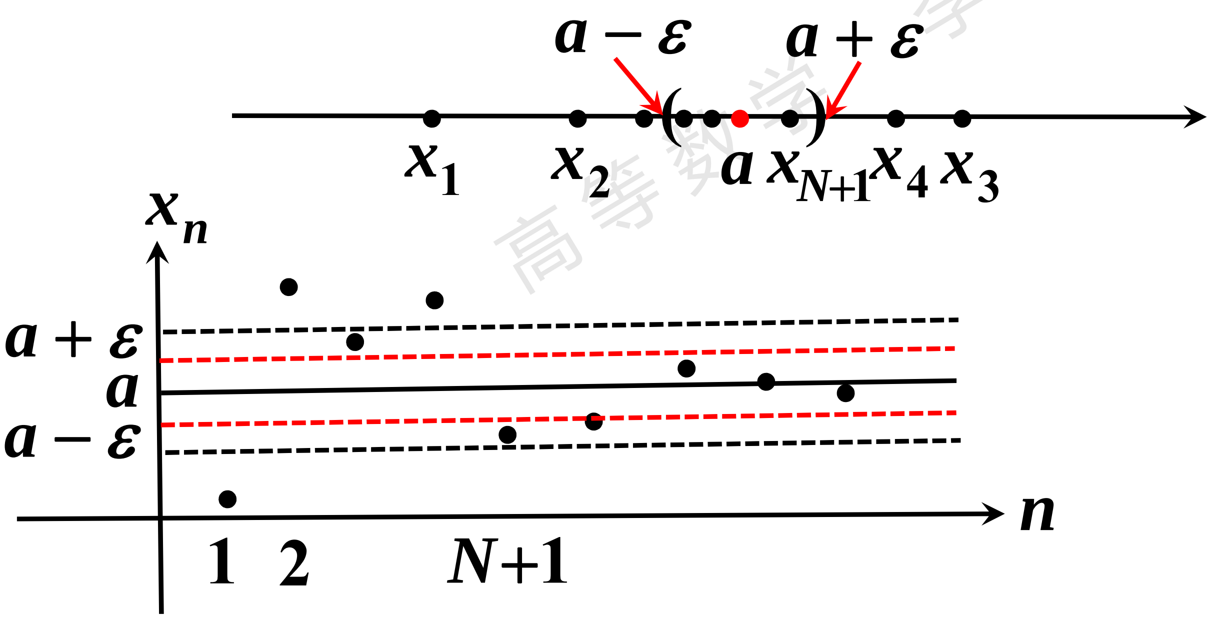
数列极限的定义又称为“$\varepsilon - N$” 定义。

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+, \forall n : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon 。$$

- 数列极限的几何意义

"$\varepsilon - N$" 定义

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+, \forall n : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon 。$$



【例题1】用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$，找 N，使得当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$。

基本方法1：解不等式：$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$，得 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$，

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，

有 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$，$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$， 证毕。

【例题2】用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$，找 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|\frac{n!}{n^n}-0|<\varepsilon$。

问题：怎么办？ 不需要找最小的 N！

基本方法2：放大不等式：$|\frac{n!}{n^n}|<\frac{2}{n}<\varepsilon$，解得 $n>\frac{2}{\varepsilon}$，

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，有 $|\frac{n!}{n^n}-0|<\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$， 证毕。

【例题3】用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2+n-4}=\dfrac{1}{2}$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$, 找 N, 使得当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2+n-4}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$。

即 $\left|\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2+n-4}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-5n+10}{2(2n^2+n-4)}\right|<\varepsilon$,

问题：怎么办？直接解不等式吗？

基本方法3：先增加限制条件，再放大不等式求解。

【例题3】证(续)：增加限制条件 $n>4$,

放大不等式：$\left|\dfrac{-5n+10}{2(2n^2+n-4)}\right|<\dfrac{5n}{4n^2}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{5}{4\varepsilon}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{4,[\dfrac{5}{4\varepsilon}]\}$，当 $n>N$ 时，

有 $\left|\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2+n-4}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2+n-4}=\dfrac{1}{2}$， 证毕。

思考题：$\left|\dfrac{2n^2+3n-1}{2n^3-3n^2+4}\right|<\varepsilon$ 如何处理?

【例题4】用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>1)$。

证：基本思想：

$\forall\varepsilon>0$, 找 N, 使得当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$。

证法1：解不等式 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, 得: $n>\dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$，略。

证法2：设 $t=\sqrt[n]{a}-1(a>1\Rightarrow t>0)$，则 $a=(1+t)^n>1+nt$,

故 $|\sqrt[n]{a}-1|=t<\dfrac{a-1}{n}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\dfrac{a-1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, 证毕。

思考题：

1. 如何用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(0<a<1)$。

2. 如何用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

【例题5】设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，反之不然。

问题：能否分别讨论 $x_n>0, x_n=0, x_n<0$?

【例题5】证明:

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 知: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$,

所以: $\forall \varepsilon > 0$, 取上述 N, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$,

此时 $||x_n| - |a|| \le |x_n - a| < \varepsilon$,

即证得 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$。

反之，可考虑数列 $\{x_n\} = \{(-1)^{n-1}\}$。

【例题6】设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=0$。

证明：由数列 $\{x_n\}$ 有界知 $\exists M>0,\ \forall n, |x_n|<M$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ 知 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in Z^+$，当 $n>N$ 时，$|y_n|<\varepsilon$，

此时，$|x_n\cdot y_n|<M\cdot\varepsilon$，

问题：怎么办？令 $M\varepsilon=\varepsilon_1$ ？

怎样描述更加规范呢？

【例题6】证明(续):

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ 知 $\forall\varepsilon>0,\cdots\cdots$

对于 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M},\exists N$, 当 $n>N$ 时, $|y_n-0|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$,

所以: $\forall\varepsilon>0$, 取上述 N, 当 $n>N$ 时,

$$|x_n\cdot y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=0$, 证毕。

【例题7】设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\,(a\neq 0)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$。

证明：$|x_n^2 - a^2| = |x_n + a||x_n - a|$

问题：如何处理 $|x_n + a|$ 呢?

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 知，对于 $\varepsilon_0 = |a|, \exists N_1$，当 $n > N_1$ 时，

有 $|x_n - a| < \varepsilon_0 = |a|$，故 $|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < |a|$

进一步，可得 $|x_n + a| < 3|a|, (n > N_1)$。

【例题7】证明(续):

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,知 $\forall \varepsilon > 0$, 对于 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3|a|}$, $\exists N_2$,

当 $n > N_2$ 时,有 $|x_n - a| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3|a|}$,

所以:$\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,

当 $n > N$ 时,$|x_n^2 - a^2| = |x_n + a||x_n - a| < 3|a| \cdot \dfrac{\varepsilon}{3|a|} = \varepsilon$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$,证毕。

思考题:设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\,(a > 0)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$。

本次课程内容小结

下次课程内容预告

谢　谢！