姓名：

学号：

学院和年级：

上海科技大学

2022-2023 学年第一学期本科生期中考试卷

开课单位：

授课教师：陈浩，李铮，赵俐俐，朱佐农

考试科目：《高等数学 I》

课程代码：

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

一、　选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若当 $x \to 0$ 时，$(\cos x - 1)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin^n x$ 高阶的无穷小，且 $x\sin^n x$ 是比 $3^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 的值为（　B　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

2. 已知平面曲线的极坐标方程为 $r=\cos\theta+\sin\theta$，则该曲线在对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程为（　D　）

(A) $y=x$.　　(B) $y=-x$.　　(C) $y=x-2$.　　(D) $y=-x+2$.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2n}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right)=$（　A　）

(A) $\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\dfrac{1}{3}$.　　(C) $\dfrac{1}{6}$.　　(D) 1.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，满足：$f(a)f(b)<0$，且 $f'(x)>-f(x)$，$x\in(a,b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点个数为（　C　）

(A) 3.　　(B) 2.　　(C) 1.　　(D) 0.

5. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$ 内可导，则对于下列论断：

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\infty$，则 $f'(x_0)$ 不存在；

（2）若 $f'(x_0)$ 存在且等于常数 A，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 也存在且等于 A；

（3）若 $f'(x_0)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在.

正确论断的个数是（　B　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

二、 填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

6. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$ = ______________$\underline{e^{-4}}$______________.

7.函数 $f(x)=\dfrac{x^3+4x+5}{x^2-1}$ 的第一类间断点是：________$\underline{x=-1}$________.

8. 函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x(t)=1+t^3, \\ y(t)=t+3t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\mathrm{d}f\big|_{x=2}$ = ________$\underline{\dfrac{7}{3}\mathrm{d}x}$________.

9. 已知 $f(a)=2$， $f'(a)=3$，则极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\left[f(a+2h)\right]^2-\left[f(a-h)\right]^2}{h}$ = ____$\underline{36}$____.

10. 设函数 $f(x)=(1+x)^x$，则 $f(x)$ 带皮亚诺余项的二阶麦克劳林展开式为 $\underline{1+x^2+o(x^2)}$______________________________.

三、 极限定义证明题（本题 8 分）

11. 用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to3}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=0$.

证：$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(1,2\varepsilon)>0$，当 $0<|x-3|<1$ 时，有 $2<x<4$，且 （4 分）

$$\left|1-\frac{3}{x}\right|=\frac{|x-3|}{|x|}<\frac{|x-3|}{2}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to3}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=0$. （8 分）

四、极限计算（每小题 8 分，共 16 分）

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}(x-\arcsin x)}{\sin x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}$ （4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{3x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}\quad=-\dfrac{1}{6}$. （8 分）

13. 已知函数 $f(x)$ 满足：$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\sin^2 x)}{2x^2}$ （4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\sin^2 x)-f'(0)}{2\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)=3$. （8 分）

或：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$，（$x\to 0$）

$=3x^2+o(x^2)$，（$x\to 0$） （4 分）

所以，$f(\sin^2 x)=3\sin^4 x+o(\sin^4 x)=3\sin^4 x+o(x^4)$，（$x\to 0$）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x+o(x^4)}{x^4}=3$. （8 分）

注：若用两次洛必达法则，得到正确结果，则得 6 分。

五、导数计算（每题 9 分，共 18 分）

14. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{y}+6xy+x^{2}-1=0$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}\right|_{x=0}$.

解：由 $\mathrm{e}^{y}+6xy+x^{2}-1=0$ 可知 $y(0)=0$，

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\mathrm{e}^{y}+6xy+x^{2}-1=0\Rightarrow \mathrm{e}^{y}y'+6y+6xy'+2x=0\ \Rightarrow y'(0)=0$，　（4 分）

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\mathrm{e}^{y}y'+6y+6xy'+2x=0\Rightarrow \mathrm{e}^{y}\left(y'\right)^{2}+\mathrm{e}^{y}y''+12y'+6xy''+2=0$

$\Rightarrow y''(0)=-2$.（9 分）

15. 设函数 $f(x)=(x+1)^{2}\sin x+\ln x$，求 $f^{(2022)}(\pi)$.

解：$\left((x+1)^{2}\sin x\right)^{(2022)}$

$=(x+1)^{2}\sin(x+\frac{2022}{2}\pi)+2022\cdot 2(x+1)\cdot\sin(x+\frac{2021}{2}\pi)+\frac{2022\cdot 2021}{2}\cdot 2\cdot\sin(x+\frac{2020}{2}\pi)$

（4 分）

$\left(\ln x\right)^{(2022)}=\frac{(-1)^{2021}2021!}{x^{2022}}$　（7 分）

$f^{(2022)}(\pi)=4044(\pi+1)\sin(1011\pi+\frac{\pi}{2})-\frac{2021!}{\pi^{2022}}=-4044(\pi+1)-\frac{2021!}{\pi^{2022}}$.　（9 分）

六、解答题（本题 8 分）

16. 设 $-\frac{3}{2}<x_0<3$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$，$n\in\mathbf{N}$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解：显然，由归纳法有 $0\le x_n\le 3$（$n=1,2,\cdots$），且

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n+3}-\sqrt{2x_{n-1}+3}=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{\sqrt{2x_n+3}+\sqrt{2x_{n-1}+3}},$$

故 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，从而 $\{x_n\}$ 单调，

由单调有界定理可知 $\{x_n\}$ 收敛.（6 分）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$ 两边令 $n\to\infty$，

得 $A=\sqrt{2A+3}$，解得 $A=3$.（8 分）

七、证明题（本题 10 分，其中第一小题 4 分，第二小题 6 分）

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)=M>0$. 证明：

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$；

(2) 对于大于 1 的任意正整数 n，存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，且 $\xi_1\ne\xi_2$，使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{n}{M}$.

证：（1）因为 $f\in C[0,1]$，$f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)=M>0$，所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=M$，由费马引理可知 $f'(x_0)=0$；（4 分）

（2）对大于1的任意正整数 n，由 $f(0)=0<\frac{M}{n}<M=f(x_0)$ 及介值定理可知，$\exists\eta\in(0,x_0)$，使得 $f(\eta)=\frac{M}{n}$，（7 分）

因为 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$、$[\eta,1]$ 上连续，在 $(0,\eta)$、$(\eta,1)$ 上可导，由拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,\eta)$、$\xi_2\in(\eta,1)$，使 $f(\eta)-f(0)=f'(\xi_1)\cdot\eta$，$f(\eta)-f(1)=f'(\xi_2)(\eta-1)$，

从而，$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1}{f(\eta)}-\frac{\eta-1}{f(\eta)}=\frac{1}{f(\eta)}=\frac{n}{M}$.　（10 分）