

姓名:

学号:

学院和年级:

# 上海科技大学

## 2022-2023 学年第一学期本科生期末考试卷

开课单位:

授课教师: 陈浩, 李铮, 赵俐俐, 朱佐农

考试科目: 《高等数学 I》

课程代码:

### 考生须知:

1. 请严格遵守考场纪律, 禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生, 除携带必要考试用具外, 书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生, 可以携带教师指定的材料独立完成考试, 但不准相互讨论, 不准交换材料。

### 考试成绩录入表:

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名:

复核人签名:

日期:

日期:

一、 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设函数  $f(x)$  是  $\sin x$  的一个原函数, 则  $f(x)$  的一个原函数是 ( )

- (A)  $-\cos x + 1$ ; (B)  $\cos x + 1$ ; (C)  $\sin x + x$ ; (D)  $-\sin x + x$

2. 函数  $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}$  的单调增加区间为 ( )

- (A)  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ; (B)  $(-\infty, -1)$ ; (C)  $(-1, 3)$ . (D)  $(3, +\infty)$ .

3. 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  有几条渐近线? ( )

- (A) 3; (B) 2; (C) 1; (D) 4.

4. 下列反常积分中收敛的是 ( )

- (A)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$ ; (B)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$ ; (C)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$ ; (D)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ .

5. 设函数  $f(x)$  为连续函数, 对于两个命题:

(I) 若  $F(x) = \int_0^x (\int_0^u [f(t) - f(-t)] dt) du$ , 则  $F(x)$  为奇函数,

(II) 若  $f(x)$  为奇函数, 则  $G(x) = \int_0^x [\int_x^y f(t^3) dt] dy$  为奇函数,

下列选项正确的是

- (A) (I)、(II) 均正确; (B) (I)、(II) 均错误;  
(C) 仅 (I) 正确; (D) 仅 (II) 正确.

二、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 曲线  $y = (x - 5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$  的下凸区间为: \_\_\_\_\_.

7. 设函数  $f(x) = (1 + x) \arctan x$ , 则  $f(x)$  带皮亚诺余项的三阶麦克劳林

展开式为: \_\_\_\_\_.

8.  $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot e^{\cos x} dx =$  \_\_\_\_\_.

9. 设  $f(x)$  连续且满足  $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2}) dt + 3e^x$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

10. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{n+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}{n+\frac{n}{n}} \right) = \underline{\hspace{10em}}.$

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分）

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x [t - \ln(1+t)] dt}{(1+e^{-x})(x - \arctan x)}$

12. 计算不定积分  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$

13. 设函数  $f(x) = \int_{-1}^1 |x-t|e^{t^2} dt$  求  $f''(x)$ 。

四、 计算题（每小题 8 分，共 24 分）

14. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}, & 0 \leq x \leq 1 \\ xe^{-x}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , 计算  $\int_1^3 f(x-1)dx$ .

15. 计算反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arcsin \frac{1}{x} dx$ .

16. 求微分方程  $y' = \frac{y}{x^2 \ln y + x}$  的通解。

五、计算题（每小题 10 分，20 分）

17. 全面讨论曲线  $y = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$  的性态，并描绘曲线的图形。

$$\left( y' = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, y'' = \frac{5x+2}{x^4} e^{\frac{1}{x}} \right)$$

18. 设抛物线  $y = ax^2 + bx$  在  $0 \leq x \leq 1$  时,  $y \geq 0$ , 且该抛物线与  $x$  轴及直线  $x = 1$  所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ , 试确定  $a, b$ , 使此图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积  $V$  最小。

七、证明题 (本题 8 分)

19. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $1 < f(x) < 2$ ,

证明:  $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < \frac{9}{8}$  ..