一、　选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 a 的值为（　　）

(A) $-\frac{1}{2}$.　　(B) -2.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 2.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则下列极限一定存在的是（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$.　　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^a$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$.　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$.

3. 曲线 $(x(t),y(t))=(\sec t,\tan t)$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的法线方程为（　　）

(A) $y=\sqrt{2}x-1$.　(B) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.　(C) $y=-\sqrt{2}x+3$.　(D) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$.

4. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=$（　　）

(A) 0.　　(B) 6.　　(C) 36.　　(D) ∞.

5. 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，则下列论断

（1）若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在间断点；

（2）若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界；

下列选项正确的是（　　）

(A) 仅(1)正确.　(B) 仅(2)正确.　(C) 都正确.　(D) 都错误.

二、 填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}+1, & x<0,\\ 2+\sin ax, & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 $a=$______________.

7. 函数 $y=x^{\frac{1}{1-x}}$ 在 $x=2$ 处的微分为____________________________________.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sin\dfrac{\pi}{x}}$ 的可去间断点有____________________________________.

9．已知平面曲线的极坐标方程为 $r=\theta$，则该曲线在 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程

为____.

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-3}}-\cdots-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=$____________________.

三、 极限定义证明题（本题 8 分）

11. 用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2+1}=-1$.

四、极限计算（每题 **8** 分，共 **16** 分）

12. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)(1-\cos 2x)-2x^2}{x^4}$.

13. 设$f(x)$在点$x=1$附近有定义，且在点$x=1$处可导，$f(1)=0$，$f'(1)=2$，求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$.

五、导数计算（每小题 8 分，共 16 分）

14. 设方程 $y = x\ln(x^2 + y^2)$ 确定了一个二阶可导的隐函数 $y = y(x)$，且 $y(1) = 0$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}$.

15. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$，求 $f^{(n)}(1)$（n 为正整数） .

六、解答题（本题 10 分）

16. 设 $x_0 > 0$，$x_n = \dfrac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}$，$n \in \mathbf{N}_+$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

七、证明题（本题 10 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（1）存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0) = 2-3x_0$；

（2）存在 $\xi,\eta \in (0,1)$，且 $\xi \neq \eta$，使得 $(1+f'(\xi))(1+f'(\eta)) = 4$。