姓名：

学号：

学院：

年级：

上海科技大学

2021-2022 学年第一学期期末考试卷

开课单位：

授课教师：李铮、赵俐俐

考试科目：《高等数学 I》

课程序号：

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题目	一	二	三	四	五	六	**总分**
计分							
复核							

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

一. 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x}$ 在 $[-2,1]$ 上的最大值为　　　（　C　）

（A） 1 ；（B） $-2+\sqrt{3}$ ；（C） $\dfrac{5}{4}$ ；（D） $\dfrac{3}{4}$.

2. 设 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=\int_0^x \sqrt{t}\sin t\,\mathrm{d}t \sim cx^k$，则　　　（　B　）

$(A)\ c=1,\ k=\dfrac{3}{2}$; $(B)\ c=\dfrac{2}{5}, k=\dfrac{5}{2}$; $(C)\ c=\dfrac{2}{3}, k=\dfrac{5}{2}$; $(D)\ c=\dfrac{2}{5}, k=\dfrac{3}{2}$.

3. 曲线 $y=\dfrac{x^2+a}{\sqrt{x^2-b}}$, $(a>0, b>0$ 为常数$)$ 有几条渐近线？（　A　）

（A） 4；　（B） 1；　（C） 2；　（D） 3.

4. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $(x-1)\mathrm{e}^x$, 则 $f'(x)=$（　D　）

(A) $x\mathrm{e}^x$ ；(B) $(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$ ；(C) $x\mathrm{e}^{x+1}$ ；(D) $(x+1)\mathrm{e}^x$

5. 下列反常积分中发收敛的是　　（　B　）

（A） $\int_0^1 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ ；　（B） $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ ；

（C） $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ；　（D） $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\int_0^{t-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \\ y=t\ln(3t-2)\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}=$ 3 .

$t=1$

8. 曲线 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 的平均值为 $\frac{2}{\pi}$.

9. $\int_{-1}^1\left(2x^2+\dfrac{6^x-1}{3^x+2^x}\right)\mathrm{d}x=$ $\frac{4}{3}$.

10. 微分方程 $y\mathrm{d}x-(x+y)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $x=y\ln|y|+Cy$ 或 $y=0$

三. 计算下列各题（每小题 8 分，共 24 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\arcsin t\,dt}{(1+\cos x)(x-\sin x)}$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\arcsin t\,dt}{2\cdot\frac{1}{6}x^3} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\arcsin t\,dt}{x^3}$

$= 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{3x^2} = 1$

12. 计算 $\int\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

令 $x = 2\sec\theta$, $x^2-4 = 4\tan^2\theta$

$\therefore$ 原积分 $= \int\dfrac{2\tan\theta}{2\sec\theta}\cdot 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$= 2\int\tan^2\theta\,d\theta = 2\int(\sec^2\theta-1)\,d\theta$

$= 2\int d\tan\theta - 2\int d\theta = 2\tan\theta - 2\theta + C$

$= \sqrt{x^2-4} - 2\,\mathrm{arcsec}\,\frac{x}{2} + C$

13. 计算 $\int_1^{\sqrt{2}}\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

令 $x = \tan\theta$, $\theta: \frac{\pi}{4}$, $\arctan\sqrt{2}$

$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\dfrac{1}{\sec\theta\tan\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\dfrac{1}{\sin\theta}d\theta$

$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\dfrac{d\cos\theta}{\cos^2\theta-1} = \frac{1}{2}\ln|\cos\theta-1| - \frac{1}{2}\ln|\cos\theta+1|\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$

$= \frac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$= \frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{2-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}$

四．计算下列各题（每小题 **10** 分，共 **30** 分）

14. 设 $f(x)=\cos^2 x+\sin 2x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

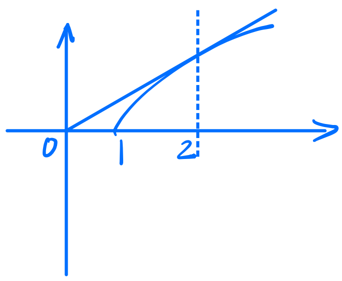
设 $C=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx$ ， $f(x)=\cos^2 x+\sin 2x+C$

$\therefore\ C=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x+\sin 2x+C)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx=2\left(-\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\cdot-\frac{\pi}{4}\cos\pi=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\ f(x)=\cos^2 x+\sin 2x+\frac{\pi}{2}$

15. 过原点求曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线方程，并计算由此切线、曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。



设切点 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$，切线：$y=\frac{\sqrt{x_0-1}}{x_0}x$

$\frac{\sqrt{x_0-1}}{x_0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}\Rightarrow x_0=2$

$\therefore$ 切线：$y=\frac{x}{2}$

$V=\pi\int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx-\pi\int_1^2 y^2\,dx$

$=\pi\int_0^2\frac{x^2}{4}\,dx-\pi\int_1^2 x-1\,dx=\frac{\pi}{6}$

16. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos 2x$，求 $f(x)$。

$f'(x)=f(x)\cdot 2+e^{2x}(2\cos 2x-2\sin 2x)$

$f'-2f=Q(x)$

通解：$f(x)=e^{-\int -2dx}\left(\int Q\,e^{\int -2dx}\,dx+C\right)$

$=e^{2x}\left(\int Q e^{-2x}\,dx+C\right)$

$=2e^{2x}\int \cos 2x-\sin 2x\,dx+Ce^{2x}$

$=e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x+C)$

五．（本题 **12** 分）

17. 全面讨论曲线 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的性态，并描绘曲线的图形。

（$y'=\dfrac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}, y''=\dfrac{8}{3(x+1)^3}$）

定义域 $x\neq -1$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	$-\frac{8}{3}$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$

极大值 $-\frac{8}{3}$，极小值 0

铅直渐近线：$x=-1$

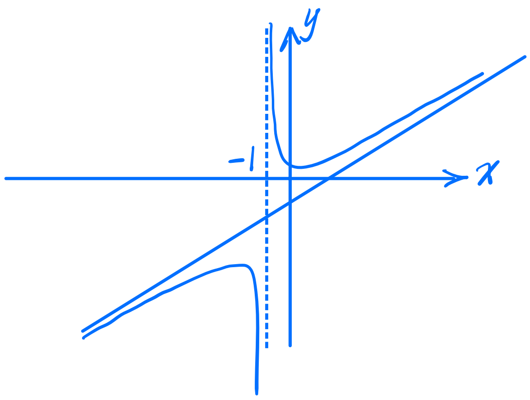
斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{3x(x+1)}=\dfrac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\infty} y-\frac{x}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2-x(x+1)}{3(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1}{3(x+1)}=-1$$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x-1$

$\therefore$



六．证明题（本题 **4+4** 分，其中 **4** 分为附加分）

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 xf(x)dx=0$，

证明：$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $\int_0^{\xi} f(x)dx=\xi f(\xi)$ 。

设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $G(x)=\int_0^x t f(t)dt$

$\therefore F(0)=0, F(1)=0$, $G(0)=G(1)=0$

$G(x)=\int_0^x t f(t)dt=\int_0^x t F'(t)dt=tF(t)\Big|_0^x-\int_0^x F(t)dt$

$=xF(x)-\int_0^x F(t)dt$

$\therefore G(1)=0 \Rightarrow F(1)=\int_0^1 F(t)dt$

设 $H(x)=\int_0^x F(t)dt-G(x)$, $H(0)=H(1)=0$

$\therefore \exists\xi\in(0,1)$, $H'(\xi)=0\Rightarrow F(\xi)=G'(\xi)$

$\therefore \int_0^{\xi} f(x)dx=\xi f(\xi)$