姓名：
学号：
学院和年级：

上海科技大学

2020-2021 学年第一学期本科生期中考试卷

开课单位：

授课教师：李铮，赵俐俐

考试科目：《高等数学 I》

课程代码：

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
计分								
复核								

评卷人签名：　　　　复核人签名：

日期：　　　　日期：

一、 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 当 $x \to 0^+$ 时，$\sqrt{1+x+\sqrt{x}}-1$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 的值为（　　）

(A) 1.　　(B) $\frac{3}{4}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{1}{4}$.

2. 下列函数的导函数在其定义域上有界的是（　　）

(A) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.　　(B) $x\ln x$.　　(C) $\sqrt{\frac{x^8+1}{x^4+1}}$.　　(D) $\sin(x^2)$.

3. 曲线 $(x(t),y(t))=(\sec t,\tan t)$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为（　　）

(A) $y=\sqrt{2}x-1$.　　(B) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.　　(C) $y=-\sqrt{2}x+3$.　　(D) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$.

4. 下列极限中最小的是（ ）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n+2^n}$.　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{5}}{x}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微，则下列论断正确的个数是（　　）

（1）开区间 (a,b) 内未必存在 ξ 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（2）若每点的导数 $f'(x)$ 均为有理数，则 $f(x)$ 必然是一次函数.

（3）若 $f'(a)f'(b)<0$，则函数在开区间 (a,b) 内能取到最大值.

(A) 0 个.　　(B) 1 个.　　(C) 2 个.　　(D) 3 个.

二、 填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

6. 椭圆 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 在点 $(\sqrt{5},\frac{8}{5}\sqrt{5})$ 处的法线的斜率为____________________.

7. 函数 $f(x)=x^x+\sin x$ 在 $x=1$ 处的微分为__________________________.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$ 在 $x=1$ 处是________________________间断点.

9. 函数 $f(x)=x^3-12x^2+36$ 在 $[0,10]$ 上的最小值为______________________.

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=$________________________________.

三、 极限题（每小题 8 分，共 16 分）

11. 用极限定义证明: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-x^2}{1+x}=1$.

12. 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\pi}{x^2}\right)^{\sin x}$.

四、导数计算（每小题 12 分，共 24 分）

13. 设函数 $f(x)=x+e^x$，记 $\varphi(x)=f^{-1}(x)$ 为 f 的反函数，试求 $\varphi'(1)$ 和 $\varphi''(1)$.

14. 设函数 $f(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{2x}$，求 $f^{(n)}(x)$，其中 $n\geq 1$.

五、解答题（每题 10 分，共 20 分）

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ bx, & x\leq 0 \end{cases}$, 请根据实数 a,b 讨论 f 在原点的连续性和可导性.

16. 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导并且导函数有界，证明：存在正数 A,B 使得恒有 $|f(x)| \le A|x|+B$.

七、附加题（本题 6 分）

17. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1, x_2=2, x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_{n+1}+x_n), n \ge 1$.

（1）证明：$\{x_n\}$ 收敛；（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.